



Sur les caractères des groupes réductifs finis : applications aux groupes spéciaux linéaires et unitaires

Cédric Bonnafé

► To cite this version:

Cédric Bonnafé. Sur les caractères des groupes réductifs finis : applications aux groupes spéciaux linéaires et unitaires. *Asterisque*, 2006, 306, 165 p. hal-00004633

HAL Id: hal-00004633

<https://hal.science/hal-00004633>

Submitted on 5 Apr 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur les caractères des groupes réductifs finis à centre non connexe : applications aux groupes spéciaux linéaires et unitaires

CÉDRIC BONNAFÉ¹

5 Avril 2005

Résumé : Un premier but de cet article est de présenter une synthèse des résultats de plusieurs auteurs concernant les caractères des groupes réductifs finis à centre non connexe. Nous nous intéressons particulièrement aux problèmes directement liés à la non connexité du centre. Nous insistons notamment sur les caractères de Gelfand-Graev et les caractères semisimples.

Un deuxième but est d'étudier l'influence de la non connexité du centre sur la théorie des faisceaux-caractères. Nous nous concentrons notamment sur la famille des faisceaux-caractères dont le support rencontre la classe unipotente régulière : ce sont les analogues naturels des caractères semisimples.

Le dernier but est l'application de ces résultats aux groupes réductifs finis de type A , déployés ou non (comme par exemple les groupes spéciaux linéaires ou unitaires). Lorsque le cardinal du corps fini de référence est assez grand, nous obtenons un paramétrage des caractères irréductibles, calculons explicitement le foncteur d'induction de Lusztig dans la base des caractères irréductibles, paramétrons les faisceaux-caractères et montrons que les fonctions caractéristiques de ces faisceaux-caractères sont des transformées de Fourier des caractères irréductibles (conjecture de Lusztig). Ces résultats permettent de construire un algorithme théorique pour calculer la table de caractères de ces groupes.

Abstract : A first aim of this paper is to present an overview of results obtained by several authors on the characters of finite reductive groups with non-connected centre. We are particularly interested in problems directly linked to the non-connectedness of the centre. We insist on Gelfand-Graev and semisimple characters.

A second aim is to study the influence of the non-connectedness of the centre on the theory of character sheaves. We study more precisely the family of character sheaves whose support meets the regular unipotent class: these are analogues of the semisimple characters.

The last aim is the application of these results to finite reductive groups of type A , split or not (as for instance the special linear or special unitary groups). Whenever the cardinality of the finite field is large enough, we obtain a parametrization of the irreducible characters, a parametrization of the character sheaves, and we show that the characteristic functions of character sheaves are Fourier transforms of the irreducible characters (Lusztig's conjecture). This gives a theoretical algorithm for computing the character table of these groups.

¹CNRS, UMR 6623,
Département de Mathématiques,
Université de Franche-Comté
16 Route de Gray
25030 BESANÇON Cedex
FRANCE
bonnafe@math.univ-fcomte.fr

Introduction

En 1907, Schur [Sc] et Jordan [Jo] déterminaient les tables de caractères du groupe général linéaire $GL(2, q)$ et du groupe spécial linéaire $SL(2, q)$. En 1951, Steinberg [St2] déterminait la table de caractères de $GL(3, q)$ et $GL(4, q)$, en utilisant entre autres des constructions générales de représentations (que nous appelons de nos jours *unipotentes*) de $GL(n, q)$ (voir [St1]). Finalement, au prix d'un tour de force combinatoire remarquable, Green [Gr] déterminait en 1955 la table de caractères de $GL(n, q)$ (au moins algorithmiquement). Par contre, les progrès concernant le groupe spécial linéaire furent beaucoup plus long. En 1971, Lehrer [Le1] déterminait une partie de la table de caractères de $SL(4, q)$, celle correspondant aux séries discrètes. Citons également les travaux de Lehrer [Le2] puis Digne, Lehrer et Michel [DiLeMi1] qui donnent des informations partielles pour le calcul de la table de caractères de $SL(n, q)$. Ces informations sont suffisantes pour compléter la table de caractères lorsque n est premier. Un des buts de cet article est de fournir un algorithme théorique pour calculer la table de caractères de $SL(n, q)$: cependant, nous ne sommes capable de montrer la validité de cet algorithme que lorsque q est assez grand.

Plus généralement, si \mathbf{G} est un groupe réductif connexe défini sur une clôture algébrique \mathbb{F} du corps fini à p éléments \mathbb{F}_p (p premier) et si $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ est une isogénie dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius relatif à une \mathbb{F}_q -structure sur \mathbf{G} ($q = p^f$), le calcul de la table de caractères du groupe fini \mathbf{G}^F (appelé *groupe réductif fini*) est loin d'être résolu en toute généralité. Rappelons quand même que le cas du groupe $Sp(4, q)$ a été résolu, pour q impair, par Srinivasan [Sr] en 1968. D'autres résultats ont été obtenus sur les petits groupes (groupes de Suzuki, groupes de Ree...).

Pourtant, en 1976, l'article fondateur de Deligne et Lusztig [DeLu1] permettait à la théorie des caractères des groupes réductifs finis de faire des progrès considérables. Leur idée, inspirée par des calculs de Drinfeld montrant que la série discrète de $SL(2, q)$ apparaissait dans la cohomologie ℓ -adique de la variété définie par l'équation $xy^q - yx^q = 1$, était d'utiliser la structure de variété de \mathbf{G} pour produire des sous-variétés de \mathbf{G} sur lequel le groupe fini \mathbf{G}^F agit et de récupérer ainsi des représentations de \mathbf{G}^F dans la cohomologie ℓ -adique de ces variétés. Poursuivant dans cette voix, Lusztig [Lu5], après une série impressionnante d'articles, obtenait en 1984 le paramétrage des caractères irréductibles de \mathbf{G}^F (dans l'esprit du programme de Langlands) lorsque le centre de \mathbf{G} est connexe. En plus de ce paramétrage, il obtenait une formule explicite pour le degré de ces caractères ainsi qu'un algorithme (théorique) permettant de calculer les valeurs de ces caractères en les éléments semi-simples.

Au cours de sa démarche, Lusztig introduisait une nouvelle base orthonormale de l'espace des fonctions centrales, la base des *caractères fantômes*, obtenue à partir de la base des caractères irréductibles par une matrice diagonale par blocs, les blocs étant des matrices de transformées de Fourier associées à des petits groupes finis (dont la taille ne dépend pas de q). En 1984-1986, Lusztig (voir [Lu4] et [Lu6]) développait une nouvelle théorie, la théorie des *faisceaux-caractères*, dans le but de comprendre l'intrusion de ces petits groupes finis et de ces caractères fantômes. Un faisceau-caractère est un faisceau pervers \mathbf{G} -équivariant irréductible sur \mathbf{G} satisfaisant à certaines conditions. Si A est un faisceau-caractère F -stable, on peut lui associer une fonction centrale sur \mathbf{G}^F , appelée *fonction caractéristique de A* ; cette fonction n'est définie qu'à une constante multiplicative près mais Lusztig a défini des normalisations qui en font des fonctions de norme 1. De plus, Lusztig a montré que ces fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales. Il a fait la conjecture suivante :

Conjecture de Lusztig : *Si le centre de \mathbf{G} est connexe, la matrice de passage entre la base des caractères fantômes et la base des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables sur \mathbf{G} est diagonale.*

D'autre part, Lusztig a aussi décrit un algorithme théorique permettant de calculer les fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables, même lorsque le centre de \mathbf{G} n'est pas connexe. En 1995, Shoji [Sh1] démontrait cette conjecture.

Il apparaît ainsi au cours de l'évolution de la théorie que la non-connexité du centre de \mathbf{G} entraîne de nombreuses complications. Certaines sont techniques (comme par exemple le paramétrage des classes de conjugaison), d'autres sont théoriques (comme par exemple la non-connexité du centralisateur des éléments semi-simples du dual de \mathbf{G} ou l'augmentation significative du nombre de faisceaux-caractères

cuspidaux). Cette non-connexité du centre explique les difficultés qui ont émaillé la recherche d'une table de caractères pour le groupe spécial linéaire.

Plusieurs auteurs ont étudié les groupes réductifs finis à centre non connexe (Asai [As], Lusztig [Lu7], Digne et Michel [DiMi1], Digne, Lehrer et Michel [DiLeMi1], [DiLeMi2], Shoji [Sh2] ou l'auteur [Bon1], [Bon4], [Bon5]). Le paramétrage des caractères irréductibles a pu ainsi être achevée [Lu7] et des nouvelles informations sur la table de caractères du groupe \mathbf{G}^F (par exemple la valeur en les éléments unipotents réguliers [DiLeMi1]) ont été obtenues.

Concernant l'analogie de la conjecture de Lusztig, un des premiers problèmes vient de ce qu'il n'y a pas de définition indiscutable de la notion de caractère fantôme. On peut alors considérer comme une réponse positive à la conjecture de Lusztig pour les groupes à centre non connexe un théorème qui montrerait que la base des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables est obtenue à partir de la base des caractères irréductibles par une matrice diagonale par blocs, les blocs étant des matrices de transformées de Fourier associées à des petits groupes finis. Dans cette acception, la conjecture de Lusztig a été démontrée pour les groupes spéciaux orthogonaux et symplectiques par Waldspurger [Wa] lorsque q est assez grand.

Shoji [Sh3] a démontré la conjecture de Lusztig pour le groupe $SL(n, q)$ pour $p > 3n$ et q une puissance quelconque de p . Il a aussi proposé une définition intéressante de caractère fantôme : un caractère fantôme devrait être la descente de Shintani de \mathbf{G}^{F^n} à \mathbf{G}^F d'un caractère irréductible F -stable de \mathbf{G}^{F^n} (pour n suffisamment divisible). Cette définition a le mérite d'être correcte lorsque le centre de \mathbf{G} est connexe et de rendre vraie la conjecture de Lusztig dans le groupe spécial linéaire.

Un des buts du présent article est de démontrer la conjecture de Lusztig (sans prendre la définition de Shoji de caractère fantôme) pour le groupe spécial linéaire et le groupe spécial unitaire lorsque p est quelconque et q est assez grand. Plus précisément, nous obtenons un paramétrage des caractères de ces groupes réductifs finis et définissons a priori, sans référence à la théorie des faisceaux-caractères, des transformées de Fourier naturelles de ces caractères irréductibles (nous nous inspirons de [DiMi1, §5 et 6]). Nous montrons alors que la matrice de passage entre la base des transformées de Fourier et la base des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables est diagonale et calculons explicitement les coefficients diagonaux. Dans l'optique d'obtenir un algorithme pour calculer la table de caractères de ces groupes, notre résultat est satisfaisant. Il faut cependant être réaliste : la mise en œuvre de cet algorithme nécessite encore un travail considérable. Une dernière remarque : notre résultat est valide pour tous les groupes de type A , quel que soit l'endomorphisme de Frobenius considéré. Même dans le cas *déployé*, il s'applique aux groupes intermédiaires de la forme \mathbf{SL}_n/μ_d , où d divise n : ces groupes sont des extensions non triviales du groupe fini $SL(n, q)/\mu_d(\mathbb{F}_q)$ qui ne sont pas contenus dans le travail de Shoji [Sh3].

Dans le cas du groupe spécial linéaire, il serait intéressant de relier plus finement le paramétrage de Shoji et le notre pour déterminer la matrice de passage entre nos transformées de Fourier et les caractères fantômes de Shoji : lorsque q est assez grand, cette matrice de passage est diagonale mais nous n'en connaissons pas les coefficients. Il serait aussi intéressant, dans le cas du groupe spécial unitaire, de savoir si nos transformées de Fourier sont des caractères fantômes (à une constante près) au sens de Shoji.

Cet article a aussi un autre but : présenter une synthèse des résultats sur les groupes réductifs finis directement liés à la non-connexité du centre. Notons $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$ le groupe des composantes connexes du centre de \mathbf{G} . Nous montrons comment relier $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ au système de racines de \mathbf{G} , étudions le morphisme $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ (où \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi de \mathbf{G}) en lien avec les automorphismes du diagramme de Dynkin affine, relient la structure de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ avec la non-connexité du centralisateur des éléments semi-simples du dual \mathbf{G}^* de \mathbf{G} , étudions la distinction qu'elle entraîne entre séries de Lusztig géométriques et rationnelles, étudions l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ sur les caractères de \mathbf{G}^F à travers la théorie de Harish-Chandra, calculons les composantes irréductibles des caractères de Gelfand-Graev, étudions l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ (par conjugaison ou par translation) sur les faisceaux-caractères, avant d'appliquer tout ceci aux caractères des groupes de type A . Parmi ces résultats, beaucoup sont bien connus et dûs à d'autres auteurs, mais nous avons souhaité les présenter ensemble, notamment pour les relier entre eux et quelquefois pour en améliorer légèrement le degré de généralité.

Pour étudier les groupes à centre non connexe, nous reprenons une technique courante [DeLu1] : elle consiste à voir \mathbf{G} comme un sous-groupe fermé distingué d'un groupe $\tilde{\mathbf{G}}$ à centre connexe tel que $\tilde{\mathbf{G}}/\mathbf{G}$ soit abélien (c'est toujours possible ; par exemple, plonger $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$). La théorie de Clifford

permet alors, par restriction de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ à \mathbf{G}^F , d'utiliser ce que l'on sait de $\tilde{\mathbf{G}}^F$, par exemple par les avantages liés à la connexité du centre de $\tilde{\mathbf{G}}$.

Cet article est organisé comme suit. Dans le chapitre I, nous introduisons les notations générales en vigueur dans tout l'article, présentons le contexte et établissons quelques résultats préliminaires à la suite. Dans le chapitre II, nous montrons comment calculer $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ (pour un sous-groupe de Levi \mathbf{L} de \mathbf{G}) de plusieurs manières. Nous rappelons les différentes constructions d'un morphisme entre le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ des composantes connexes du centralisateur d'un élément semi-simple s de \mathbf{G}^* et le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ des caractères linéaires de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Nous y construisons une action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ sur les fonctions centrales sur \mathbf{G}^F . Nous rappelons aussi les notions de *cuspidalité* introduites dans [Bon3], [Bon4], [Bon5] et [Bon6]. Un des buts du chapitre III est de démontrer la disjonction des séries de Lusztig rationnelles. L'essentiel de cette preuve est contenu dans [Lu3] ou [DiMi2]. Dans le chapitre IV, nous étudions l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ à travers la théorie de Harish-Chandra. Nous ne pensons pas que ceci soit traité ailleurs dans ce degré de généralité. Le chapitre V, largement inspiré par [As], [DiLeMi1], [DiLeMi2] et [Bon1], traite des éléments unipotents réguliers, des caractères de Gelfand-Graev, de leurs composantes irréductibles (les caractères dits *réguliers*) et de leur dual de Curtis (les caractères dits *semi-simples*). Nous obtenons notamment une décomposition des caractères semi-simples comme combinaison linéaire d'induits de fonctions absolument cuspidales. Dans le chapitre VI, nous étudions les différentes actions de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur les faisceaux-caractères. Tout d'abord, si A est un faisceau-caractère, la \mathbf{G} -équivalence de A induit une action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur A via un caractère linéaire. De plus, via l'action par translation, $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ permute les faisceaux-caractères : nous déterminons l'action de cette permutation à travers le procédé d'induction à partir des faisceaux-caractères cuspidaux. Pour finir, nous étudions les faisceaux-caractères apparaissant dans l'induit de faisceaux-caractères cuspidaux dont le support rencontre la classe unipotente régulière et décrivons leur fonction caractéristique en termes d'induction de Lusztig.

Dans le chapitre VII, nous supposons que toutes les composantes quasi-simples de \mathbf{G} sont de type A et que \mathbf{G} est muni d'un endomorphisme de Frobenius quelconque, déployé ou non. Nous montrons comment les fonctions centrales introduites dans le chapitre V permettent, lorsque q est grand, de construire les caractères irréductibles comme combinaisons linéaires d'induits de fonctions caractéristiques de fonctions absolument cuspidales. En utilisant le fait que le support de tout faisceau-caractère cuspidal sur \mathbf{G} rencontre (à translation près par $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$) la classe unipotente régulière et les formules de la dernière section du chapitre VI, nous obtenons la conjecture de Lusztig. Donnons-en un énoncé sommaire : soit s un élément semi-simple de \mathbf{G}^{*F^*} , soit $W^\circ(s)$ le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$, soit $A_{\mathbf{G}^*}(s) = C_{\mathbf{G}^*}(s)/C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ (c'est un groupe abélien), soit $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ la série de Lusztig géométrique de \mathbf{G}^F associée à la classe de conjugaison de s dans \mathbf{G}^* et soit $\text{FCar}(\mathbf{G}, (s))^F$ la série géométrique des faisceaux-caractères F -stables associée à s . Notons $\mathcal{I}(\mathbf{G}, s)$ l'ensemble des triplets (χ, ξ, α) tels que χ parcourt un ensemble de représentants des $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ -orbites F^* -stables de caractères irréductibles de $W^\circ(s)$, $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)^{F^*})^\wedge$ et $\zeta \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi))$ (où $A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)$ est le stabilisateur de χ dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$). Notons $\mathcal{I}^\vee(\mathbf{G}, s)$ l'ensemble des triplets (χ, a, τ) où χ parcourt un ensemble de représentants des $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ -orbites F^* -stables de caractères irréductibles de $W^\circ(s)$, $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)^{F^*}$ et $\tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi))^\wedge$. Si A est un faisceau-caractère F -stable sur \mathbf{G} , nous noterons \mathcal{X}_A sa fonction caractéristique (explicitement normalisée comme dans l'article).

Théorème. *Supposons q assez grand. Alors il existe deux bijections*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{G}, s) &\longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)) \\ (\chi, \xi, \alpha) &\longmapsto R_\chi(s)_{\xi, \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\vee(\mathbf{G}, s) &\longrightarrow \text{FCar}(\mathbf{G}, (s))^F \\ (\chi, a, \tau) &\longmapsto A_\chi(s)_{a, \tau} \end{aligned}$$

telles que, si $(\chi, a, \tau) \in \mathcal{I}^\vee(\mathbf{G}, s)$, alors

$$\mathcal{X}_{A_\chi(s)_{a, \tau}} = \frac{\zeta_{s, \chi, a, \tau}}{|A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)|} \sum_{\substack{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)^{F^*})^\wedge \\ \alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi))}} \overline{\xi(a)\tau(\alpha)} R_\chi(s)_{\xi, \alpha},$$

où $\zeta_{s, \chi, a, \tau}$ est une racine de l'unité explicitement déterminée.

Il est à noter que, comme conséquence des travaux effectués, on obtient une description explicite du foncteur d'induction de Lusztig en termes du groupe de Weyl (lorsque q est assez grand).

Dans la section 25, nous étudions plus précisément le cas où \mathbf{G} est un sous-groupe de Levi d'un groupe déployé de type A . Nous obtenons par exemple, en utilisant uniquement la théorie de Harish-Chandra, un paramétrage des caractères irréductibles de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ par $\mathcal{I}(\mathbf{G}, s)$ dont nous montrons qu'il coïncide avec le paramétrage du théorème précédent lorsque q est assez grand. Cela nous permet de retrouver, comme cas particulier des théorèmes du chapitre VII, le résultat de notre thèse [Bon1, théorème 16.2.1] sur le calcul de l'induction de Lusztig dans le groupe spécial linéaire. Nous rappelons aussi comment fonctionne la décomposition de Jordan.

Dans l'appendice A, nous rassemblons les résultats techniques sur les caractères de produits en couronne que nous utilisons dans les deux derniers chapitres. Dans l'appendice B, nous rappelons des résultats classiques sur les sommes de Gauss et montrons comment ils permettent d'obtenir les valeurs des racines de l'unité $\zeta_{s, \chi, a, \tau}$ intervenant dans l'énoncé du théorème précédent.

REMARQUE - Cet article est largement inspiré de notre thèse [Bon1], notamment des parties qui n'ont fait l'objet d'aucune publication. Nous en avons cependant amélioré et enrichi le traitement. L'appendice est essentiellement contenu dans [Bon1, partie 1, chapitre I] : il est à noter que le corollaire 28.3, qui correspond à [Bon1, proposition 1.9.1], est ici affublé d'une preuve correcte, contrairement à ce qui est écrit dans [Bon1] ! Le chapitre III est une version très enrichie de [Bon1, §6]. Le chapitre IV correspond à [Bon1, §7] : remarquons que le groupe noté ici $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ et noté $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ dans [Bon1, §7.4] est défini ici de manière intrinsèque et non par un produit semi-direct peu canonique. Le chapitre V correspond à [Bon1, §12 et 13] : ici, l'amélioration consiste à utiliser la version précisée du théorème de Digne, Lehrer et Michel sur la restriction de Lusztig des caractères de Gelfand-Graev que l'auteur a obtenue dans [Bon7]. La section 25 correspond à [Bon1, §15 et 16] : compte tenu de la remarque précédente, le résultat sur l'induction de Lusztig est ici plus précis. Il faut aussi noter que la convention dans le paramétrage des caractères irréductibles de \mathbf{G}^F ayant été légèrement modifié, les formules obtenues ici se retrouvent allégées de certains signes.

REMERCIEMENTS - L'auteur tient à remercier très chaleureusement Jean Michel pour l'avoir lancé dans ce sujet lors de sa thèse, pour l'avoir initié à la théorie des faisceaux-caractères et pour les innombrables et fructueuses discussions que nous avons eues sur ce sujet depuis.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
Chapitre I. Préliminaires, notations, définitions	7
1. Notations générales	7
2. Le contexte	12
3. Fourre-tout	16
Chapitre II. Le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$	18
4. Calcul de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$	18
5. Groupes simplement connexes	20
6. Le groupe $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$	21
7. Cuspidalité	24
8. Éléments semi-simples et non connexité du centre	24
Chapitre III. Induction et restriction de Lusztig, séries de Lusztig	30
9. Caractères linéaires de tores maximaux	30
10. Induction et restriction de Lusztig	33
11. Séries de Lusztig géométriques et rationnelles	37
Chapitre IV. Théorie de Harish-Chandra	42
12. Autour d'un théorème de M. Geck	42
13. Algèbres d'endomorphismes	45
Chapitre V. Autour des caractères de Gelfand-Graev	51
14. Caractères de Gelfand-Graev	51
15. Caractères réguliers et caractères semi-simples	54
16. Caractères semi-simples ou réguliers cuspidaux	58
17. Caractères semi-simples et fonctions absolument cuspidales	60
Chapitre VI. Faisceaux-caractères	66
18. Action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur les faisceaux-caractères	66
19. Action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur $\mathrm{FCar}(\mathbf{G})$	68
20. Fonctions caractéristiques	72
21. Éléments unipotents réguliers	73
22. Fonctions caractéristiques	76
Chapitre VII. Groupes de type A	78
23. Description de $\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$	78
24. Conjecture de Lusztig	83
25. Le groupe spécial linéaire	85
26. Questions en suspens	87
Appendice A. Produits en couronne	88
27. Extension canonique	88
28. Produits en couronne de groupes symétriques	89
29. Extension canonique, extension préférée	91
Appendice B. Sommes de Gauss	93
30. Sommes de Gauss	93
31. Calcul de $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$	94
Références	96

Chapitre I. Préliminaires, notations, définitions

Dans la première section de ce chapitre, nous introduisons les notations et conventions générales valables dans tout cet article. Dans la deuxième section, nous introduisons les objets que nous allons étudier (groupes réductifs finis) tout en établissant quelques résultats préliminaires. La troisième section est une collection de résultats, notamment sur les centralisateurs de sous-tores de groupes réductifs, que nous utiliserons dans la suite de l'article.

1. NOTATIONS GÉNÉRALES

1.A. Notations usuelles. Nous notons $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Comme il est d'usage, \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} désignent respectivement l'anneau des entiers relatifs, le corps des nombres rationnels et le corps des nombres réels. Si r est un nombre premier, \mathbb{Z}_r désigne l'anneau des entiers r -adiques et nous notons \mathbb{Q}_r son corps des fractions. Le corps résiduel de \mathbb{Z}_r est noté \mathbb{F}_r . Si $x \in \mathbb{Q}$, nous notons $\nu_r(x) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ sa valuation r -adique. Si $x \neq 0$, nous définissons $x_r = r^{\nu_r(x)}$ et $x_{r'} = xx_r^{-1}$. Nous notons $\mathbb{Z}_{(r)} = \{x \in \mathbb{Q} \mid \nu_r(x) \geq 0\}$.

1.B. Groupes, anneaux, corps. Nous fixons dans cet article un nombre premier p . Soit \mathbb{F} une clôture algébrique du corps fini à p éléments \mathbb{F}_p . Si q est une puissance de p , nous notons \mathbb{F}_q le sous-corps de \mathbb{F} de cardinal q . Par *variété* (ou *groupe algébrique*), nous entendons une variété (respectivement un groupe algébrique) sur \mathbb{F} . Si $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$\mu_n(\mathbb{F}) = \{\xi \in \mathbb{F}^\times \mid \xi^n = 1\}.$$

Alors $|\mu_n(\mathbb{F})| = n_{p'}$.

Nous nous fixons aussi un nombre premier ℓ différent de p et nous notons $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps des nombres ℓ -adiques \mathbb{Q}_ℓ . Nous fixons une fois pour toutes un automorphisme involutif $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $x \mapsto \bar{x}$ tel que $\bar{\omega} = \omega^{-1}$ pour toute racine de l'unité ω dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$.

Si E est un ensemble et si \sim est une relation d'équivalence sur E , on notera E/\sim l'ensemble des classes d'équivalence de \sim dans E et $[E/\sim]$ un ensemble de représentants de ces classes d'équivalence. Le lecteur pourra vérifier que, chaque fois que cette notation sera employée (par exemple dans une somme $\sum_{x \in [E/\sim]} f(x)$), le résultat sera indépendant du choix des représentants. Si X est une partie de E , nous noterons 1_X (ou 1_X^E s'il est nécessaire de préciser l'ensemble de référence) la fonction caractéristique de X à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Si G est un groupe, nous notons $|G| \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ son ordre. Si X est un sous-ensemble de G , $\langle X \rangle$ désigne le sous-groupe de G engendré par X , $N_G(X)$ le normalisateur de X dans G et $C_G(X)$ le centralisateur de X dans G . Si $g \in G$, nous notons $o(g) = |\langle g \rangle|$ son ordre. Nous notons G_{tors} l'ensemble des éléments de G d'ordre fini, G_p l'ensemble des éléments de G d'ordre fini égal à une puissance de p et $G_{p'}$ l'ensemble des éléments de G d'ordre fini premier à p . Si $g \in G_{\text{tors}}$, nous notons g_p et $g_{p'}$ les uniques éléments de G_p et $G_{p'}$ respectivement tels que $g = g_p g_{p'} = g_{p'} g_p$: g_p est appelé la p -partie de g tandis que $g_{p'}$ est appelé la p' -partie de g . Remarquons que $o(g_p) = o(g)_p$ et $o(g_{p'}) = o(g)_{p'}$.

Si \mathcal{A} est un groupe agissant sur G et si $\varphi \in \mathcal{A}$, nous noterons $H^1(\varphi, A)$ l'ensemble des classes de φ -conjugaison de G (deux éléments g et g' de G sont dits φ -conjugués s'il existe $x \in G$ tel que $g' = x^{-1}g\varphi(x)$). En d'autres termes, $H^1(\varphi, G) = H^1(\mathbb{Z}, G)$, où le générateur 1 de \mathbb{Z} agit sur G via φ . Si φ est d'ordre fini, on a en général $H^1(\varphi, G) \neq H^1(\langle \varphi \rangle, G)$.

EXEMPLE 1.1 - Supposons G abélien. Alors $H^1(\varphi, G) = G/\text{Im}(\varphi - 1)$ où on note $\varphi - 1 : G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}\varphi(g)$: en particulier, $H^1(\varphi, G)$ hérite naturellement d'une structure de groupe. Si de plus G est fini, alors $|A^\varphi| = |H^1(\varphi, G)|$. \square

Nous fixons une fois pour toutes un isomorphisme de groupes

$$\iota : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'} \longrightarrow \mathbb{F}^\times$$

et un morphisme injectif de groupes

$$j : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times.$$

On obtient alors un morphisme injectif

$$\kappa : \mathbb{F}^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

défini par $\kappa = j \circ \iota^{-1}$. Pour finir ce paragraphe, nous définissons le morphisme surjectif $\tilde{i} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{F}^\times$ comme étant la composition de ι avec le morphisme $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'}$. Notons que $\text{Ker } \tilde{i} = \mathbb{Z}[1/p] = \{ap^r \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } r \in \mathbb{Z}\}$. De même, nous notons $\tilde{j} : \mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ le composé de j et du morphisme canonique $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; on a $\text{Ker } \tilde{j} = \mathbb{Z}$.

1.C. Caractères des groupes finis. Si G est un groupe fini, nous notons $\text{Irr } G$ l'ensemble de ses caractères irréductibles sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et G^\wedge le groupe de ses caractères linéaires à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. On a $G^\wedge \subset \text{Irr } G$; on a $G^\wedge = \text{Irr } G$ si et seulement si G est abélien. Si $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes finis, nous noterons $\hat{f} : H^\wedge \rightarrow G^\wedge$, $\theta \mapsto \theta \circ f$ le morphisme dual de f .

Si G est un sous-groupe distingué d'un groupe \tilde{G} et si $\phi \in \tilde{G}$, nous noterons $\text{Cent}(G\phi)$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel des fonctions $G\phi \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ invariantes par G -conjugaison. Nous définissons sur $\text{Cent}(G\phi)$ le produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_G : \text{Cent}(G\phi) \times \text{Cent}(G\phi) &\longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\ (\gamma, \gamma') &\longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \gamma(g\phi) \overline{\gamma'(g\phi)}. \end{aligned}$$

Si H est un sous-groupe de G et si $g \in G$ est tel que ${}^g\phi H = H$, nous noterons $\text{Ind}_{Hg\phi}^{G\phi} : \text{Cent}(Hg\phi) \rightarrow \text{Cent}(G\phi)$ l'adjoint, pour les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Hg\phi}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G\phi}$, de l'application de restriction naturelle $\text{Res}_{Hg\phi}^{G\phi} : \text{Cent}(G\phi) \rightarrow \text{Cent}(Hg\phi)$. En fait, si $f \in \text{Cent}(Hg\phi)$, on a

$$(1.2) \quad (\text{Inf}_{Hg\phi}^{G\phi} f)(x\phi) = \sum_{\substack{y \in [G/H] \\ y^{-1}x\phi y \in Hg\phi}} f(y^{-1}x\phi y).$$

On en déduit que

$$\text{Ind}_{Hg\phi}^{G\phi} = \text{Res}_{G\phi}^{G<\phi>} \circ \text{Ind}_{H<g\phi>}^{G<\phi>} \tilde{f},$$

où \tilde{f} est l'extension par zéro de f à $H < g\phi >$. Avec ces notations, $\text{Cent}(G)$ est le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel des fonctions centrales $G \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\text{Irr } G$ en est une base orthonormale. Nous identifions $\mathbb{Z} \text{Irr } G$ avec le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell G$ -modules de type fini.

Si $g \in G$, nous noterons γ_g^G la fonction centrale sur G définie par

$$\gamma_g^G(g') = \begin{cases} 0 & \text{si } g \text{ et } g' \text{ ne sont pas conjugués dans } G, \\ |C_G(g)| & \text{sinon.} \end{cases}$$

En fait,

$$\gamma_g^G = \sum_{\gamma \in \text{Irr } G} \overline{\gamma(g)} \gamma.$$

De plus, si $g \in H$, alors

$$\text{Ind}_H^G \gamma_g^H = \gamma_g^G.$$

Pour finir cette sous-section, nous allons donner une formule permettant de calculer l'induction $\text{Ind}_{Hg\phi}^{G\phi}$ dans un cas particulier. Supposons maintenant que $\tilde{G} = G = H < g >$ et $\phi = 1$. En particulier, H est distingué dans G . Pour tout caractère irréductible χ de H invariant par G (c'est-à-dire par g), on fixe une extension $\tilde{\chi}$ de χ à G (l'existence de $\tilde{\chi}$ est assurée par la cyclicité de G/H). On note $\tilde{\chi}_g$ la restriction de $\tilde{\chi}$ à Hg . Alors $(\tilde{\chi}_g)_{\chi \in (\text{Irr } H)^g}$ est une base orthonormale de $\text{Cent}(Hg)$ et

$$(1.3) \quad \text{Ind}_{Hg}^G \tilde{\chi}_g = \sum_{\xi \in (G/H)^\wedge} \xi(g)^{-1} (\tilde{\chi} \otimes \xi).$$

Ici, un caractère linéaire de G/H est aussi vu comme un caractère linéaire de G .

DÉMONSTRATION DE 1.3 - Posons $\gamma = \text{Ind}_{Hg}^G \tilde{\chi}_g$ et $\gamma' = \sum_{\xi \in (G/H)^\wedge} \xi(g)^{-1} (\tilde{\chi} \otimes \xi)$. D'après 1.2, on a, pour $x \in G$,

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \sum_{\substack{y \in [G/H] \\ y^{-1}xy \in Hg}} \tilde{\chi}(y^{-1}xy) \\ &= \sum_{\substack{y \in [G/H] \\ y^{-1}xy \in Hg}} \tilde{\chi}(x) \\ &= \begin{cases} |G/H| \tilde{\chi}(x) & \text{si } x \in Hg \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &= \tilde{\chi}(x) \left(\sum_{\xi \in (G/H)^\wedge} \xi(g)^{-1} \xi(x) \right) \\ &= \begin{cases} |G/H| \tilde{\chi}(x) & \text{si } x \in Hg \\ 0 & \text{sinon.} \blacksquare \end{cases} \end{aligned}$$

1.D. Groupes algébriques. Si \mathbf{H} est un groupe algébrique linéaire, nous notons \mathbf{H}° sa composante connexe contenant l'élément neutre, \mathbf{H}_{uni} sa sous-variété fermée formée des éléments unipotents, \mathbf{H}_{sem} l'ensemble de ses éléments semi-simples, $\mathbf{Z}(\mathbf{H})$ son centre, $\mathbf{D}(\mathbf{H})$ son groupe dérivé et $\mathbf{R}_u(\mathbf{H})$ son radical unipotent. Nous posons $\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \mathbf{Z}(\mathbf{H})/\mathbf{Z}(\mathbf{H})^\circ$. Nous notons $\text{rg}(\mathbf{H})$ le rang de \mathbf{H} c'est-à-dire la dimension d'un de ses tores maximaux. Nous posons $\text{rg}_{\text{sem}}(\mathbf{H}) = \text{rg}(\mathbf{D}(\mathbf{H}))$. Si $h \in \mathbf{H}$, nous posons $C_{\mathbf{H}}^\circ(h) = C_{\mathbf{H}}(h)^\circ$ et $A_{\mathbf{H}}(h) = C_{\mathbf{H}}(h)/C_{\mathbf{H}}^\circ(h)$. Remarquons que $\mathbf{H}_{\text{sem}} = \mathbf{H}_{p'}$ et que $\mathbf{H}_{\text{uni}} = \mathbf{H}_p$.

Nous appellerons *complément de Levi* de \mathbf{H} tout sous-groupe \mathbf{L} de \mathbf{H} tel que $\mathbf{H} = \mathbf{L} \ltimes \mathbf{R}_u(\mathbf{H})$ (il est à noter qu'il n'existe pas toujours de complément de Levi). Nous appellerons *sous-groupe de Levi* de \mathbf{H} tout complément de Levi d'un sous-groupe parabolique de \mathbf{H} .

Si $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ est une isogénie dont une puissance F^δ est un endomorphisme de Frobenius pour une structure rationnelle sur \mathbf{H} , on a, d'après le théorème de Lang, $H^1(F, \mathbf{H}) = H^1(F, \mathbf{H}/\mathbf{H}^\circ)$. D'autre part, si $h \in \mathbf{H}^F$, nous noterons, pour alléger les notations lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur F , $\gamma_h^{\mathbf{H}}$ la fonction centrale $\gamma_h^{\mathbf{H}^F}$.

1.E. Caractères rationnels et sous-groupes à un paramètre. Soit \mathbf{H} un groupe algébrique linéaire. Nous notons $X(\mathbf{H})$ le groupe (abélien, noté additivement) des caractères rationnels $\mathbf{H} \rightarrow \mathbb{F}^\times$ et $Y(\mathbf{H})$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre $\mathbb{F}^\times \rightarrow \mathbf{H}$. On a bien sûr $Y(\mathbf{H}) = Y(\mathbf{H}^\circ)$. Si $\pi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$ est un morphisme de groupes algébriques, nous posons $\pi_X : X(\mathbf{H}') \rightarrow X(\mathbf{H})$, $x \mapsto x \circ \pi$ et $\pi_Y : Y(\mathbf{H}) \rightarrow Y(\mathbf{H}')$, $y \mapsto \pi \circ y$. Remarquons que π_X est un morphisme de groupes. Si $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ est l'isogénie précédente, les applications F_X et F_Y seront notées par la même lettre F .

Si \mathbf{H} est commutatif, alors $Y(\mathbf{H})$ est un groupe abélien (que nous noterons additivement) : c'est un \mathbb{Z} -module libre de rang $\text{rg}(\mathbf{H})$ et nous définissons alors une forme bilinéaire

$$\langle, \rangle_{\mathbf{H}} : X(\mathbf{H}) \times Y(\mathbf{H}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

par la condition

$$x(y(\xi)) = \xi^{\langle x, y \rangle_{\mathbf{H}}}$$

pour tous $x \in X(\mathbf{H})$, $y \in Y(\mathbf{H})$ et $\xi \in \mathbb{F}^\times$. Cette forme bilinéaire est étendue par linéarité en une forme bilinéaire

$$(X(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \times (Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

que l'on notera encore $\langle, \rangle_{\mathbf{H}}$ par abus de notation. Cette dernière forme bilinéaire est non dégénérée.

Si $\pi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$ est un morphisme de groupes algébriques commutatifs, alors π_Y est un morphisme de groupes et π_X et π_Y sont adjoints par rapport à $\langle, \rangle_{\mathbf{H}}$ et $\langle, \rangle_{\mathbf{H}'}$. En d'autres termes,

$$\langle \pi_X(x), y \rangle_{\mathbf{H}} = \langle x, \pi_Y(y) \rangle_{\mathbf{H}'}$$

pour tous $x \in X(\mathbf{H}')$ et $y \in Y(\mathbf{H})$. Nous définissons par ailleurs le morphisme

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}_{\mathbf{H}} : Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbf{H} \\ y \otimes_{\mathbb{Z}} r &\longmapsto y(\tilde{\iota}(r)). \end{aligned}$$

Soient $x \in X(\mathbf{H})$ et $y \in Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Alors

$$(1.4) \quad x(\tilde{i}_{\mathbf{H}}(y)) = \tilde{i}(< x, y >_{\mathbf{H}}).$$

Démonstration de 1.4. Écrivons $y = y' \otimes_{\mathbb{Z}} r$ avec $y' \in Y(\mathbf{H})$ et $r \in \mathbb{Q}$. Alors

$$\begin{aligned} x(\tilde{i}_{\mathbf{H}}(y)) &= x(y'(\tilde{i}(r))) \\ &= \tilde{i}(r)^{<x, y'>_{\mathbf{H}}} \\ &= \tilde{i}(r < x, y' >_{\mathbf{H}}) \\ &= \tilde{i}(< x, y >_{\mathbf{H}}), \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

REMARQUE - Si \mathbf{H} est un tore, alors $<, >_{\mathbf{H}}$ est une dualité parfaite et $\tilde{i}_{\mathbf{H}}$ est surjective (en effet, l'application $Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}^{\times}, y \otimes \xi \mapsto y(\xi)$ est un isomorphisme de groupes). □

Si A est un groupe agissant sur le groupe commutatif \mathbf{H} , nous définissons une action de A sur les \mathbb{Z} -modules $X(\mathbf{H})$ et $Y(\mathbf{H})$ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} A \times X(\mathbf{H}) &\longrightarrow X(\mathbf{H}) \\ (\sigma, x) &\longmapsto \sigma_X^{-1}(x) = x \circ \sigma^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A \times Y(\mathbf{H}) &\longrightarrow Y(\mathbf{H}) \\ (\sigma, y) &\longmapsto \sigma_Y(y) = \sigma \circ y. \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que

$$< \sigma(x), \sigma(y) >_{\mathbf{H}} = < x, y >_{\mathbf{H}}$$

pour tous $x \in X(\mathbf{H})$, $y \in Y(\mathbf{H})$ et $\sigma \in A$.

1.F. Groupes diagonalisables. Nous terminons cette section en rappelant quelques faits élémentaires sur les groupes diagonalisables. Premièrement, si \mathbf{D}' est un sous-groupe fermé d'un groupe diagonalisable \mathbf{D} (en particulier, \mathbf{D}' est aussi un groupe diagonalisable), alors la suite de \mathbb{Z} -modules

$$(1.5) \quad 0 \longrightarrow X(\mathbf{D}/\mathbf{D}') \longrightarrow X(\mathbf{D}) \longrightarrow X(\mathbf{D}') \longrightarrow 0$$

induite par l'inclusion $\mathbf{D}' \hookrightarrow \mathbf{D}$ est exacte. Si X' est un sous-groupe de $X(\mathbf{D})$ tel que

$$(*) \quad \mathbf{D}' = \{d \in \mathbf{D} \mid \forall \chi \in X', \chi(d) = 1\},$$

alors l'application naturelle $X(\mathbf{D}) \rightarrow X(\mathbf{D}')$ induit un isomorphisme de groupes

$$(1.6) \quad X(\mathbf{D}') \simeq (X(\mathbf{D})/X')/(X(\mathbf{D})/X')_p.$$

Puisque $X(\mathbf{D}'/\mathbf{D}'^o) \simeq X(\mathbf{D}')_{\text{tors}}$, on déduit de 1.6 un isomorphisme de groupes abéliens finis

$$(1.7) \quad X(\mathbf{D}'/\mathbf{D}'^o) \simeq (X(\mathbf{D})/X')_{p'}.$$

Nous supposons maintenant, et ce jusqu'à la fin de cette sous-section, que \mathbf{D} est *connexe* (c'est-à-dire que \mathbf{D} est un tore) et que \mathbf{D}' est *fini*. Tout d'abord, l'application

$$(1.8) \quad \begin{aligned} X(\mathbf{D}') &\longrightarrow \mathbf{D}'^{\wedge} \\ x &\longmapsto \kappa \circ x \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes abéliens finis. L'isomorphisme 1.7 montre que X' est d'indice fini dans $X(\mathbf{D})$. Posons maintenant

$$Y' = \{y \in Y(\mathbf{D}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \mid \forall x \in X', < x, y >_{\mathbf{D}} \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors Y' contient $Y(\mathbf{D})$ et la restriction de $\tilde{i}_{\mathbf{D}}$ à Y' a pour image \mathbf{D}' et induit un isomorphisme de groupes abéliens finis

$$(1.9) \quad (Y'/Y(\mathbf{D}))_{p'} \simeq \mathbf{D}'.$$

DÉMONSTRATION DE 1.9 - D'après (*) et 1.4, on a $\tilde{i}_{\mathbf{D}}(Y') \subset \mathbf{D}'$. D'autre part, d'après [Bou1, §4, n° 8], l'application

$$\begin{aligned} X(\mathbf{D})/X' \times Y'/Y(\mathbf{D}) &\longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \\ (x + X', y + Y(\mathbf{D})) &\longmapsto \tilde{j}(< x, y >_{\mathbf{D}}) \end{aligned}$$

est une dualité parfaite. Cela montre que $\tilde{i}_{\mathbf{D}}(Y') = \mathbf{D}'$ et que l'on a bien un isomorphisme $(Y'/Y(\mathbf{D}))_{p'} \simeq \mathbf{D}'$ (toujours grâce à 1.4). ■

Lemme 1.10. *Soit $y \in Y(\mathbf{D})$ et soit $n \in \mathbb{Z}$, premier à p , tels que $y(\tilde{i}(1/n)) = 1$. Alors il existe $y_0 \in Y(\mathbf{D})$ tel que $y = ny_0$.*

DÉMONSTRATION - On a $|\mu_n(\mathbb{F})| = n$ car n est premier à p . De plus, $\mu_n(\mathbb{F}) \subset \text{Ker } y$ par hypothèse. Donc y induit un morphisme de groupes algébriques $\bar{y} : \mathbb{F}^\times / \mu_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbf{D}$.

Mais l'application $\mathbb{F}^\times \rightarrow \mathbb{F}^\times$, $\xi \mapsto \xi^n$ est séparable car p ne divise pas n . Donc elle induit un isomorphisme de groupes algébriques $\alpha : \mathbb{F}^\times / \mu_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^\times$. Soit $y_0 = \bar{y} \circ \alpha^{-1}$. Alors $y_0 \in Y(\mathbf{D})$ et $y = ny_0$ par construction. ■

Proposition 1.11. *Soient \mathbf{T} et \mathbf{T}' deux tores et soit $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ un morphisme de groupes algébriques de noyau fini. Alors le morphisme $\pi_Y : Y(\mathbf{T}) \rightarrow Y(\mathbf{T}')$ est injectif et on a un isomorphisme naturel*

$$(Y(\mathbf{T}')/\text{Im } \pi_Y)_{p'} \simeq \text{Ker } \pi.$$

DÉMONSTRATION - Soit $y \in \text{Ker } \pi_Y$. Alors l'image de y est contenue dans $\text{Ker } \pi$ mais est aussi connexe et contient 1. Donc $y = 0$ car $\text{Ker } \pi$ est fini : l'injectivité de π_Y est prouvée.

Notons Y' le sous-groupe de $Y(\mathbf{T}')$ formé des éléments $y' \in Y(\mathbf{T}')$ tels que $ny' \in \text{Im } \pi_Y$ pour un $n \in \mathbb{Z}$ premier à p . Alors $\text{Im } \pi_Y \subset Y'$ et, par construction, $Y'/\text{Im } \pi_Y = (Y(\mathbf{T}')/\text{Im } \pi_Y)_{p'}$.

Soit $y' \in Y'$ et soit $n \in \mathbb{Z}$, non divisible par p , tels que $ny' \in \text{Im } \pi_Y$. Soit y l'unique élément de $Y(\mathbf{T})$ tel que $\pi_Y(y) = ny'$. On pose

$$\sigma(y') = y(\tilde{i}(\frac{1}{n})) \in \mathbf{T}.$$

Alors $\pi(\sigma(y')) = (ny')(\tilde{i}(1/n)) = 1$ donc $\sigma(y') \in \text{Ker } \pi$. Il est facile de vérifier que l'application

$$\sigma : Y' \longrightarrow \text{Ker } \pi$$

est bien définie et est un morphisme de groupes.

Il est aussi facile de voir que $\text{Im } \pi_Y \subset \text{Ker } \sigma$. Réciproquement, soit $y' \in \text{Ker } \sigma$. Soient $n \in \mathbb{Z}$, premier à p , et $y \in Y(\mathbf{T})$ tels que $ny' = \pi_Y(y)$. Alors

$$y(\tilde{i}^{-1}(\frac{1}{n})) = 1.$$

D'après le lemme 1.10, il existe $y_0 \in Y(\mathbf{T})$ tel que $y = ny_0$. En particulier, $y' = \pi_Y(y_0)$ donc $\text{Ker } \sigma \subset \text{Im } \pi_Y$. cela montre que $\text{Ker } \sigma = \text{Im } \pi_Y$.

Il reste à prouver que σ est surjectif. Soit $t \in \text{Ker } \pi$ et soit n l'ordre de t . Alors n est premier à p et, puisque \mathbf{T} est connexe, il existe $y \in Y(\mathbf{T})$ tel que $t = y(\tilde{i}^{-1}(1/n))$ (voir par exemple [DiMi2, Proposition 0.20]). Alors $\pi_Y(y)(\tilde{i}^{-1}(1/n)) = 1$ donc, d'après le lemme 1.10, il existe $y' \in Y(\mathbf{T}')$ tel que $ny' = \pi_Y(y)$. Alors $y' \in Y'$ et $\sigma(y') = t$ par construction. ■

1.G. Dualité entre tores. Soient \mathbf{T} et \mathbf{T}^* deux tores. On suppose qu'ils sont munis respectivement d'isogénies F et F^* dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius. Nous dirons que (\mathbf{T}, F) et (\mathbf{T}^*, F^*) sont *duaux* (ou simplement que \mathbf{T} et \mathbf{T}^* sont *duaux*) s'il existe un isomorphisme $\nu : X(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} Y(\mathbf{T}^*)$ tel que $F^* \circ \nu = \nu \circ F$. Bien sûr, la relation de dualité est symétrique car, en utilisant les dualités parfaites données par $<, >_{\mathbf{T}}$ et $<, >_{\mathbf{T}^*}$, le morphisme adjoint $\nu^* : X(\mathbf{T}^*) \rightarrow Y(\mathbf{T})$ de ν est un isomorphisme.

Supposons donc que (\mathbf{T}, F) et (\mathbf{T}^*, F^*) sont duaux et soit $\nu : X(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} Y(\mathbf{T}^*)$ un isomorphisme tel que $F^* \circ \nu = \nu \circ F$. Nous identifierons $X(\mathbf{T})$ et $Y(\mathbf{T}^*)$ via ν et nous identifierons $X(\mathbf{T}^*)$ et $Y(\mathbf{T})$ via ν^* . On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{T}^F \longrightarrow \mathbf{T} \xrightarrow{F-1} \mathbf{T} \longrightarrow 1.$$

De plus, le morphisme $F - 1 : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ est étale, donc induit un isomorphisme entre \mathbf{T} et \mathbf{T}/\mathbf{T}^F . D'après 1.5, on obtient donc une suite exacte

$$(1.12) \quad 0 \longrightarrow X(\mathbf{T}) \xrightarrow{F-1} X(\mathbf{T}) \longrightarrow X(\mathbf{T}^F) \longrightarrow 0.$$

Par dualité, on obtient une suite exacte

$$(1.13) \quad 0 \longrightarrow Y(\mathbf{T}^*) \xrightarrow{F^*-1} Y(\mathbf{T}^*) \longrightarrow X(\mathbf{T}^F) \longrightarrow 0.$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul tel que F^n soit un endomorphisme de Frobenius déployé pour une structure sur un corps fini à q éléments. L'application $\mathbf{T}^{*F^{*n}} \rightarrow \mathbf{T}^{*F^*}$, $t \mapsto N_{F^{*n}/F^*}(t)$ est surjective. De plus l'application $Y(\mathbf{T}^*) \rightarrow \mathbf{T}^{*F^{*n}}$, $y \mapsto y(\tilde{\iota}(1/(q-1)))$ est surjective. Il est alors facile de vérifier que l'on a une suite exacte

$$(1.14) \quad 0 \longrightarrow Y(\mathbf{T}^*) \xrightarrow{F^*-1} Y(\mathbf{T}^*) \xrightarrow{f} \mathbf{T}^{*F^*} \longrightarrow 0,$$

où $f : Y(\mathbf{T}^*) \rightarrow \mathbf{T}^{*F^*}$, $y \mapsto N_{F^{*n}/F^*}(y(\tilde{\iota}(1/(q-1))))$. Il est à noter que l'application f ne dépend pas du choix de n . La comparaison des suites exactes 1.13 et 1.14 et l'isomorphisme 1.8 fournit un isomorphisme $\mathbf{T}^{*F^*} \simeq (\mathbf{T}^F)^\wedge$. Cet isomorphisme ne dépend que du choix de ι et j .

Nous allons l'explicitier. Soit $s \in \mathbf{T}^{*F^*}$. Notons \hat{s} le caractère linéaire de \mathbf{T}^F défini par s via l'isomorphisme précédent. Pour calculer \hat{s} , il faut tout d'abord trouver un élément $y \in Y(\mathbf{T}^*) \simeq X(\mathbf{T})$ tel que $s = N_{F^{*n}/F^*}(y(\tilde{\iota}(1/(q-1))))$. Alors

$$(1.15) \quad \hat{s} = \kappa \circ \text{Res}_{\mathbf{T}^F}^{\mathbf{T}} y.$$

2. LE CONTEXTE

2.A. Le problème. Nous nous intéressons dans cet article à la théorie des caractères d'un groupe fini de la forme \mathbf{G}^F (paramétrage des caractères, table de caractères, théorie de Deligne-Lusztig, théorie de Harish-Chandra, conjecture de Lusztig sur les faisceaux-caractères...), où \mathbf{G} est un groupe réductif connexe et $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ est une isogénie telle que F^δ est l'endomorphisme de Frobenius de \mathbf{G} relatif à une structure rationnelle sur \mathbf{G} .

Nous nous concentrons plus particulièrement sur les problèmes reliés à la non connexité du centre de \mathbf{G} . En d'autres termes, nous essayons de résoudre les questions concernant les groupes à centre non connexe en supposant que la même question est résolue pour les groupes à centre connexe. La stratégie habituelle est la suivante. Il est possible [DeLu1] de construire un groupe réductif connexe $\tilde{\mathbf{G}}$ (muni lui aussi d'une isogénie encore notée F) dont \mathbf{G} est un sous-groupe fermé F -stable contenant $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{G}})$. L'étude précise du foncteur de restriction $\text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F}$ fournit alors des éléments de réponse (théorie de Clifford).

REMARQUE - Il n'est pas déraisonnable de supposer que beaucoup de choses sont connues pour les groupes à centre connexe. Par exemple, la conjecture de Lusztig sur les faisceaux-caractères a été résolue par T. Shoji [Sh1].

C'est d'autant moins déraisonnable que notre but est d'étudier le groupe spécial linéaire. En effet, ce groupe est inclus dans le groupe général linéaire et pratiquement tout ce qui concerne la table de caractères de ce dernier est connu (aussi bien du point de vue élémentaire de J.A. Green [Gr], que du point de vue de la théorie de Deligne-Lusztig [LuSr], voire même du point de vue de la théorie des faisceaux-caractères : le lien entre ces trois théories est lui aussi bien compris). \square

2.B. Plongements. Comme expliqué ci-dessus, l'un des buts de cet article est d'étudier les foncteurs de restriction entre groupes de même type. Pour cela, nous nous fixons un groupe réductif connexe $\tilde{\mathbf{G}}$ muni d'une isogénie $F : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$ telle que F^δ est un endomorphisme de Frobenius de $\tilde{\mathbf{G}}$ relatif à une structure sur le corps fini \mathbb{F}_q (ici, δ est un entier naturel non nul et q est une puissance de p fixés une fois pour toutes : bien qu'ils ne soient pas uniquement déterminés par la donnée de $(\tilde{\mathbf{G}}, F)$, le nombre réel positif $q^{1/\delta}$ l'est).

Nous nous fixons aussi un sous-groupe fermé connexe F -stable \mathbf{G} de $\tilde{\mathbf{G}}$. Tout au long de cet article, nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- (1) *Le centre de $\tilde{\mathbf{G}}$ est connexe ;*

(2) Le groupe \mathbf{G} contient le groupe dérivé de $\tilde{\mathbf{G}}$.

REMARQUE 2.1 - Puisque tout groupe réductif peut-être plongé dans un groupe à centre connexe de même type [DeLu1], les résultats que nous allons démontrer concernant le groupe \mathbf{G} seront vrais pour tous les groupes réductifs connexes. \square

Il résulte de ces hypothèses que $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}}) \cap \mathbf{G}$ et $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$. De plus, $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{G}}) = \mathbf{D}(\mathbf{G})$. Nous notons

$$i : \mathbf{G} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}}$$

l'inclusion canonique.

Nous fixons aussi dans cet article un sous-groupe de Borel F -stable $\tilde{\mathbf{B}}_0$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ ainsi qu'un tore maximal F -stable $\tilde{\mathbf{T}}_0$ de $\tilde{\mathbf{B}}_0$. Nous notons \mathbf{U}_0 le radical unipotent de $\tilde{\mathbf{B}}_0$. On pose

$$\mathbf{B}_0 = \tilde{\mathbf{B}}_0 \cap \mathbf{G} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_0 = \tilde{\mathbf{T}}_0 \cap \mathbf{G}.$$

Alors \mathbf{B}_0 est un sous-groupe de Borel F -stable de \mathbf{G} , \mathbf{T}_0 est un tore maximal F -stable de \mathbf{B}_0 et \mathbf{U}_0 est le radical unipotent de \mathbf{B}_0 .

2.C. Système de racines. Nous notons W_0 le groupe de Weyl de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T}_0 ; remarquons que W_0 est canoniquement isomorphe au groupe de Weyl de $\tilde{\mathbf{G}}$ relativement à $\tilde{\mathbf{T}}_0$. Nous notons Φ_0 (respectivement $\tilde{\Phi}_0$) le système de racines de \mathbf{G} (respectivement $\tilde{\mathbf{G}}$) relativement à \mathbf{T}_0 (respectivement $\tilde{\mathbf{T}}_0$). Le morphisme $i_X : X(\tilde{\mathbf{T}}_0) \hookrightarrow X(\mathbf{T}_0)$ associé à i induit une bijection entre Φ_0 et $\tilde{\Phi}_0$. Nous notons Δ_0 (respectivement $\tilde{\Delta}_0$) la base de Φ_0 (respectivement $\tilde{\Phi}_0$) associée à \mathbf{B}_0 (respectivement $\tilde{\mathbf{B}}_0$). Si $\alpha \in \Phi_0$, nous notons \mathbf{U}_α le sous-groupe unipotent de dimension 1 de \mathbf{G} normalisé par \mathbf{T}_0 et associé à α .

Soit $\phi_0 : X(\mathbf{T}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow X(\mathbf{T}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ l'automorphisme d'ordre fini égal à $q^{-1/\delta} F$. Puisqu'il est d'ordre fini, on a $\det \phi_0 \in \{1, -1\}$. Nous poserons

$$\varepsilon_{\mathbf{G}} = \det \phi_0 \quad \text{et} \quad \eta_{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{D}(\mathbf{G})}.$$

D'autre part, ϕ_0 normalise W_0 et induit sur W_0 le même automorphisme que celui induit par F . Nous noterons aussi $\tilde{\phi}_0 : Y(\mathbf{T}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow Y(\mathbf{T}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ l'automorphisme d'ordre fini égal à $q^{-1/\delta} F$. Pour finir, nous noterons $\tilde{\phi}_0 : \Phi_0 \rightarrow \Phi_0$ la bijection telle que, pour toute racine $\alpha \in \Phi_0$, il existe un entier naturel δ_α tel que $F(\alpha) = p^{\delta_\alpha} \tilde{\phi}_0(\alpha)$ (si ω est une orbite sous l'action de $\tilde{\phi}_0$, alors $\sum_{\alpha \in \omega} \delta_\alpha > 0$). Bien sûr, $\tilde{\phi}_0$ stabilise Δ_0 et Φ_0^+ .

Si I est une partie de Δ_0 , nous noterons $< \Phi_I >$ le sous-système de Φ de base I , W_I le groupe de Weyl de Φ_I , \mathbf{P}_I le sous-groupe parabolique $\mathbf{B}_0 W_I \mathbf{B}_0$ de \mathbf{G} , \mathbf{U}_I son radical unipotent et \mathbf{L}_I le complément de Levi de \mathbf{P}_I contenant \mathbf{T}_0 . Alors \mathbf{P}_I (ou \mathbf{L}_I) est F -stable si et seulement si $\tilde{\phi}_0(I) = I$.

2.D. Dualité. Nous fixons un triplet $(\tilde{\mathbf{G}}^*, \tilde{\mathbf{T}}_0^*, F^*)$ dual de $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{T}}_0, F)$ au sens de [DiMi2, définition 13.10]. Nous fixons aussi un triplet $(\mathbf{G}^*, \mathbf{T}_0^*, F^*)$ dual de $(\mathbf{G}, \mathbf{T}_0, F)$. Le morphisme i induit un morphisme $i^* : \tilde{\mathbf{G}}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ commutant avec F^* et tel que $i^*(\tilde{\mathbf{T}}_0^*) = \mathbf{T}_0^*$. Il faut cependant faire attention : i^* n'est pas uniquement déterminé par i . On peut le composer avec n'importe quel automorphisme intérieur induit par un élément F^* -stable du tore maximal. Notons que i^* est surjectif.

2.E. Un résultat à la Borel-Tits. Borel et Tits ont montré, pour un groupe réductif défini sur un corps quelconque K , que tout K -complément de Levi d'un K -sous-groupe parabolique est le centralisateur d'un K -tore déployé [BorTi, théorème 4.15].

Ici, F ne définit pas forcément une structure sur un corps fini, mais il est tout de même possible de donner une caractérisation similaire des compléments de Levi F -stables de sous-groupes paraboliques F -stables. Un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} est dit \mathbf{G} -déployé (ou (\mathbf{G}, F) -déployé s'il peut y avoir ambiguïté sur l'isogénie) s'il existe un sous-groupe parabolique F -stable de \mathbf{G} dont c'est un complément de Levi.

Soit \mathbf{T} un tore maximal F -stable de \mathbf{G} et soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} contenant \mathbf{T} . On note Φ et $\Phi_{\mathbf{L}}$ les systèmes de racines respectifs de \mathbf{G} et \mathbf{L} relativement à \mathbf{T} .

Proposition 2.2. *Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) \mathbf{L} est \mathbf{G} -déployé.

(2) On a

$$\Phi_{\mathbf{L}} = \{\alpha \in \Phi \mid \forall v \in \text{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta})), \langle \alpha, v \rangle_{\mathbf{T}} = 0\}.$$

(3) Il existe un sous- $\mathbb{Q}(q^{1/\delta})$ -espace vectoriel E de $\text{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ tel que

$$\Phi_{\mathbf{L}} = \{\alpha \in \Phi \mid \forall v \in E, \langle \alpha, v \rangle_{\mathbf{T}} = 0\}.$$

(4) Il existe $v \in \text{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ tel que

$$\Phi_{\mathbf{L}} = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, v \rangle_{\mathbf{T}} = 0\}.$$

REMARQUE - Lorsque F est un endomorphisme de Frobenius (par exemple lorsque $\delta = 1$), alors la proposition précédente est une conséquence immédiate du théorème de Borel-Tits. \square

DÉMONSTRATION - Il est clair que (4) \Rightarrow (3). Le fait que (3) \Rightarrow (4) résulte de la finitude de Φ et du fait que $\mathbb{Q}(q^{1/\delta})$ est un corps infini.

Montrons maintenant que (4) \Rightarrow (1). Notons $\tilde{\phi} : \Phi \rightarrow \Phi$ la bijection telle que $F(\alpha)$ soit un multiple positif de $\tilde{\phi}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Posons

$$\Psi = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, v \rangle_{\mathbf{T}} \geq 0\}.$$

Alors $\tilde{\phi}(\Psi) = \Psi$. De plus, Ψ est close, $\Psi \cap -\Psi = \Phi_{\mathbf{L}}$ et $\Psi \cup -\Psi = \Phi$. Donc il existe un sous-groupe parabolique \mathbf{P} de \mathbf{G} dont \mathbf{L} est un complément de Levi et dont Ψ est le “système de racines” relativement à \mathbf{T} . Puisque $\tilde{\phi}(\Psi) = \Psi$, \mathbf{P} est F -stable.

Montrons maintenant que (1) \Rightarrow (4). Soit \mathbf{P} un sous-groupe parabolique F -stable de \mathbf{G} dont \mathbf{L} est un complément de Levi. Fixons un entier naturel non nul n tel que $F^{n\delta}(t) = t^{q^n}$ pour tout $t \in \mathbf{T}$. Notons μ l’endomorphisme de $Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta})$ égal à $\sum_{k=0}^{n\delta-1} q^{k/\delta} F^{n\delta-1-k}$. Alors $\mu \circ (F - q^{1/\delta}) = 0$ et

$$(*) \quad Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta}) = \text{Ker}(F - q^{1/\delta}) \oplus \text{Ker } \mu.$$

Notons Ψ le “système de racines” de \mathbf{P} relativement à \mathbf{T} . Alors il existe $\lambda \in Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ)$ tel que

$$\Psi = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \lambda \rangle_{\mathbf{T}} \geq 0\}.$$

Écrivons $\lambda = v_1 + v_2$, où v_1 et v_2 appartiennent à $Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta})$ et vérifient $F(v_1) = q^{1/\delta}v_1$ et $\mu(v_2) = 0$ (voir (*)). Posons

$$\Psi' = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, v_1 \rangle_{\mathbf{T}} \geq 0\}.$$

Nous allons montrer que $\Psi = \Psi'$. Soit $\alpha \in \Psi$. Puisque Ψ est $\tilde{\phi}$ -stable, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\langle F^k(\alpha), \lambda \rangle_{\mathbf{T}} = \langle \alpha, F^k(\lambda) \rangle_{\mathbf{T}} \geq 0$. Par conséquent $\langle \alpha, \mu(\lambda) \rangle_{\mathbf{T}} \geq 0$ ou, en d’autres termes, $\langle \alpha, n\delta v_1 \rangle_{\mathbf{T}} \geq 0$. Donc $\alpha \in \Psi'$. Réciproquement, soit $\alpha \in \Psi'$. Supposons que $\langle \alpha, \lambda \rangle_{\mathbf{T}} < 0$. Alors, puisque $\Phi \setminus \Psi$ est $\tilde{\phi}$ -stable, on obtient comme précédemment que $\langle \alpha, \mu(\lambda) \rangle_{\mathbf{T}} < 0$, c’est-à-dire $\langle \alpha, n\delta v_1 \rangle_{\mathbf{T}} < 0$.

Puisque (3) \Rightarrow (1), on en déduit que (2) \Rightarrow (1). Pour finir, montrons que (1) \Rightarrow (2). Notons

$$\Phi' = \{\alpha \in \Phi \mid \forall v \in \text{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta})), \langle \alpha, v \rangle_{\mathbf{T}} = 0\}$$

et soit $v_0 \in \text{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ tel que

$$\Phi_{\mathbf{L}} = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, v_0 \rangle_{\mathbf{T}} = 0\}.$$

Alors $\Phi' \subset \Phi_{\mathbf{L}} \subset \Phi'$. \blacksquare

Corollaire 2.3. Notons \mathcal{E} l’ensemble des sous-espaces vectoriels de $\text{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ et \mathcal{L} l’ensemble des sous-groupes de Levi F -stables \mathbf{G} -déployés de \mathbf{G} contenant \mathbf{T} . Si $E \in \mathcal{E}$, notons \mathbf{L}_E le sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} dont le système de racines relativement à \mathbf{T} est

$$\{\alpha \in \Phi \mid \forall v \in E, \langle \alpha, v \rangle_{\mathbf{T}} = 0\}.$$

Alors l’application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ E & \longmapsto & \mathbf{L}_E \end{array}$$

est une surjection décroissante.

REMARQUE 2.4 - Soient \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 deux sous-groupes paraboliques F -stables de \mathbf{G} contenant \mathbf{T} et soient \mathbf{L}_1 et \mathbf{L}_2 les compléments de Levi respectifs de \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 contenant \mathbf{T} (ils sont donc F -stables). Notons \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 les radicaux unipotents respectifs de \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 . Alors, d'après par exemple [DiMi2, proposition 2.1], $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ est un complément de Levi F -stable du sous-groupe parabolique F -stable $(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{U}_1$ de \mathbf{G} . Cela montre qu'il existe un sous-groupe de Levi F -stable \mathbf{G} -déployé minimal contenant \mathbf{T} .

Cela aurait pu se voir grâce au corollaire 2.3 dont nous reprenons les notations : ce sous-groupe de Levi F -stable \mathbf{G} -déployé minimal est $\mathbf{L}_{\text{Ker}(F-q^{1/\delta})}$. \square

2.F. Quelques propriétés du morphisme i^* . Soit $\tilde{\mathbf{T}}$ un tore maximal F -stable de $\tilde{\mathbf{G}}$ et soit $\tilde{\mathbf{T}}^*$ un tore maximal F^* -stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ dual de $\tilde{\mathbf{T}}$. On pose

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}^* = j^*(\tilde{\mathbf{T}}^*).$$

Alors, d'après 1.5, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow X(\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T}) \longrightarrow X(\tilde{\mathbf{T}}) \longrightarrow X(\mathbf{T}) \longrightarrow 0.$$

Tous les groupes impliqués dans cette suite exacte sont sans torsion donc, par dualité, on obtient que la suite

$$0 \longrightarrow X(\mathbf{T}^*) \longrightarrow X(\tilde{\mathbf{T}}^*) \longrightarrow \text{Hom}(X(\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

est exacte. Ici, l'application $X(\mathbf{T}^*) \rightarrow X(\tilde{\mathbf{T}}^*)$ est induite par le morphisme $i^* : \mathbf{T}^* \rightarrow \tilde{\mathbf{T}}^*$. En utilisant à nouveau 1.5, on obtient un isomorphisme de groupes

$$\text{Hom}(X(\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T}), \mathbb{Z}) \simeq X(\text{Ker } i^*).$$

Cela prouve la proposition suivante :

Proposition 2.5. *Le groupe $\text{Ker } i^*$ est un tore central F^* -stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ qui est dual de $\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T}$. De plus, cette dualité est compatible avec les isogénies F et F^* .*

Corollaire 2.6. *Les tores $\tilde{\mathbf{G}}/\mathbf{G}$ et $\text{Ker } i^*$ sont duaux et cette dualité est compatible avec les isogénies F et F^* .*

DÉMONSTRATION - En effet, l'injection $\tilde{\mathbf{T}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}}$ induit un isomorphisme $\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T} \simeq \tilde{\mathbf{G}}/\mathbf{G}$. \blacksquare

Si $z \in (\text{Ker } i^*)^{F^*}$, nous notons $\hat{z}^{\tilde{\mathbf{G}}}$ le caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F$ défini par la dualité du corollaire 2.6. Nous identifions $\hat{z}^{\tilde{\mathbf{G}}}$ avec le caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ qu'il induit.

Corollaire 2.7. *Le morphisme $i^* : \tilde{\mathbf{G}}^{*F^*} \rightarrow \mathbf{G}^{*F^*}$ est surjectif.*

DÉMONSTRATION - C'est une conséquence immédiate de la connexité de $\text{Ker } i^*$ et du théorème de Lang. \blacksquare

2.G. Action de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ sur $\text{Cent}(\mathbf{G}^F)$. Si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ et si $\gamma \in \text{Cent } \mathbf{G}^F$, on pose

$$\begin{aligned} t_z^{\mathbf{G}} \gamma : \mathbf{G}^F &\longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\ g &\longmapsto \gamma(zg). \end{aligned}$$

Alors $t_z^{\mathbf{G}} \gamma \in \text{Cent } \mathbf{G}^F$ et l'application

$$t_z^{\mathbf{G}} : \text{Cent } \mathbf{G}^F \longrightarrow \text{Cent } \mathbf{G}^F$$

est une isométrie. D'autre part, l'application

$$t^{\mathbf{G}} : \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F \longrightarrow \text{GL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\text{Cent } \mathbf{G}^F)$$

est un morphisme de groupes, c'est-à-dire que l'on a défini ainsi une action de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ par isométries sur $\text{Cent } \mathbf{G}^F$.

3. FOURRE-TOUT

3.A. Morphismes isotypiques. Un morphisme $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ entre groupes réductifs est dit *isotypique* si $\text{Ker } \pi$ est central et $\pi(\hat{\mathbf{G}})$ contient le groupe dérivé de \mathbf{G} .

EXEMPLE 3.1 - Les morphismes j et j^* sont isotypiques. \square

3.B. Sous-groupes de Levi auto-opposés. Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi de \mathbf{G} . On dit que \mathbf{L} est (\mathbf{G}) -*auto-opposé* si, pour tout sous-groupe de Levi \mathbf{M} de \mathbf{G} contenant \mathbf{L} strictement, on a $|N_{\mathbf{M}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}| \geq 2$. D'après [Ho], \mathbf{L} est \mathbf{G} -auto-opposé si et seulement si tout sous-groupe parabolique de \mathbf{G} dont \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi est conjugué à \mathbf{P} .

Le groupe \mathbf{G} est dit *universellement auto-opposé* si, pour tout morphisme isotypique $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ et pour tout groupe réductif $\hat{\Gamma}$ dont $\hat{\mathbf{G}}$ est un sous-groupe de Levi, $\hat{\mathbf{G}}$ est $\hat{\Gamma}$ -auto-opposé.

EXEMPLES 3.2 - (a) S'il existe une classe unipotente de \mathbf{G} supportant un système local cuspidal (au sens de [Lu4, introduction]), alors \mathbf{G} est universellement auto-opposé [Lu4, théorème 9.2].

(b) Comme nous le verrons dans la proposition 7.1 (b), un groupe cuspidal (voir §7 pour la définition) est universellement auto-opposé. \square

Soit maintenant I une partie de Δ . Alors I est dite (W) -*auto-opposée* si \mathbf{L}_I est \mathbf{G} -auto-opposé. Posons

$$W(I) = \{w \in W \mid w(I) = I\},$$

$$W^I = \{w \in W \mid w(I) \subset \Delta\}$$

et

$$I^{(1)} = \bigcap_{w \in W^I} w(I).$$

Il est clair que $W(I) \subset W^I$ et il est bien connu que $N_W(W_I) = W(I) \ltimes W_I$. La deuxième définition de sous-groupe de Levi auto-opposé montre que I est W -auto-opposée si et seulement si $W(I) = W^I$, c'est-à-dire si et seulement si $I = I^{(1)}$.

Définissons une suite décroissante $(I^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de Δ par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} I^{(0)} = I \\ I^{(n+1)} = (I^{(n)})^{(1)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Posons $I^{(\infty)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)}$. Alors $I^{(\infty)}$ est la plus grande partie W -auto-opposée de Δ contenue dans I .

3.C. Centralisateurs de sous-tores de \mathbf{G} . Le résultat suivant est une généralisation de [Bon2, corollaire 4.2.3] :

Lemme 3.3. *Soit \mathbf{B} un sous-groupe de Borel de \mathbf{G} et soit \mathbf{T} un tore maximal de \mathbf{B} . Notons \mathbf{L} un complément de Levi d'un sous-groupe parabolique \mathbf{P} de \mathbf{G} tels que $\mathbf{T} \subset \mathbf{L}$ et $\mathbf{B} \subset \mathbf{P}$. Soit Φ^+ (respectivement $\Phi_{\mathbf{L}}^+$) le système de racines positives de \mathbf{G} (respectivement \mathbf{L}) relativement à \mathbf{T} associé à \mathbf{B} . Soit A un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbf{T})$ stabilisant Φ^+ et $\Phi_{\mathbf{L}}$ et notons $W_{\mathbf{L}}$ le groupe de Weyl de \mathbf{L} relativement à \mathbf{T} . Alors*

$$C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^{W_{\mathbf{L}} \rtimes A})^{\circ}) = \mathbf{L}.$$

REMARQUE - Gardons les notations du lemme 3.3. Alors $W_{\mathbf{L}}$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbf{T})$ normalisé par A et $W_{\mathbf{L}} \cap A = \{1\}$ car A stabilise Φ^+ : le produit semi-direct $W_{\mathbf{L}} \rtimes A$ est donc bien défini. De plus, $(\mathbf{T}^{W_{\mathbf{L}}})^{\circ} = \mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}$ et ce dernier groupe diagonalisable est stable sous l'action de A . Le lemme 3.3 dit donc que

$$(3.4) \quad C_{\mathbf{G}}((\mathbf{Z}(\mathbf{L})^A)^{\circ}) = \mathbf{L}. \quad \square$$

DÉMONSTRATION - Le groupe $(\mathbf{T}^{W_{\mathbf{L}} \rtimes A})^{\circ}$ est un sous-tore de \mathbf{G} donc $\mathbf{M} = C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^{W_{\mathbf{L}} \rtimes A})^{\circ})$ est un sous-groupe de Levi de \mathbf{G} . De plus, $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}$ par la remarque précédente.

Soit $\alpha \in \Phi^+$ une racine de \mathbf{M} relativement à \mathbf{T} . Alors, d'après [Bon2, Proposition 4.2.1], on a

$$\sum_{g \in A \ltimes W_{\mathbf{L}}} g(\alpha) = 0.$$

Soit

$$\beta = \sum_{w \in W_{\mathbf{L}}} w(\alpha).$$

Supposons que $w(\alpha)$ soit positive pour tout $w \in W_{\mathbf{L}}$. Alors β est une somme de racines positives et

$$\sum_{a \in A} a(\beta) = 0$$

ce qui contredit le fait que A stabilise Φ^+ . Donc il existe $w \in W_{\mathbf{L}}$ tel que $w(\alpha)$ n'est pas positive. Par conséquent, $\alpha \in \Phi_{\mathbf{L}}$ car $\mathbf{T} \subset \mathbf{L}$ et $\mathbf{B} \subset \mathbf{P}$. ■

3.D. Centralisateur d'éléments semi-simples. Nous rappelons ici le théorème de Steinberg [St3, théorème 8.1] :

Théorème 3.5 (Steinberg). *Si $\tilde{s} \in \tilde{\mathbf{G}}^*$ est semi-simple, alors $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ est connexe.*

REMARQUE - Le théorème de Steinberg nécessite l'hypothèse de connexité du centre de $\tilde{\mathbf{G}}$. Il n'y a pas de résultat analogue pour le groupe \mathbf{G}^* . □

Chapitre II. Le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$

Nous étudions ici en détails le groupe des composantes du centre $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Les résultats de ce chapitre sont pour la plupart classiques, sauf les propositions 5.4 et 8.10. Dans la section 4, nous étudions le morphisme surjectif $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ lorsque \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi de \mathbf{G} . Dans la section 5, nous montrons comment calculer le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et le noyau du morphisme précédent en termes du diagramme de Dynkin affine, du moins lorsque \mathbf{G} est simplement connexe. La section 6 est consacrée aux multiples réalisations du groupe $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ ainsi qu'à ses liens avec les éléments semi-simples de \mathbf{G}^* . Dans la section 7, nous rappelons les différentes notions de cuspidalités introduites par l'auteur ([Bon3], [Bon6] et [Bon4]).

NOTATIONS

Nous nous fixons dans ce chapitre un tore maximal F -stable $\tilde{\mathbf{T}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ et nous posons $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}$. Nous notons W le groupe de Weyl de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T} ; remarquons que W est canoniquement isomorphe au groupe de Weyl de $\tilde{\mathbf{G}}$ relativement à $\tilde{\mathbf{T}}$. Nous notons Φ (respectivement $\tilde{\Phi}$) le système de racines de \mathbf{G} (respectivement $\tilde{\mathbf{G}}$) relativement à \mathbf{T} (respectivement $\tilde{\mathbf{T}}$). Le morphisme $i_X : X(\tilde{\mathbf{T}}) \hookrightarrow X(\mathbf{T})$ associé à i induit une bijection entre Φ et $\tilde{\Phi}$.

Nous fixons aussi un sous-groupe de Borel $\tilde{\mathbf{B}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ contenant $\tilde{\mathbf{T}}$ et nous posons $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} \cap \mathbf{G}$. Il est à noter que $\tilde{\mathbf{B}}$ n'est pas nécessairement F -stable. Nous notons Δ (respectivement $\tilde{\Delta}$) la base de Φ (respectivement $\tilde{\Phi}$) associée à \mathbf{B} (respectivement $\tilde{\mathbf{B}}$). Alors Δ est une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel $X(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$: nous notons $(\varpi_\alpha^\vee)_{\alpha \in \Delta}$ la base de $Y(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ duale de Δ (pour la dualité induite par $\langle, \rangle_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}$).

Si I est une partie de Δ , nous notons Φ_I le sous-système de racines parabolique ayant Φ comme base et nous notons W_I le groupe de Weyl de Φ_I . Nous posons $\mathbf{P}_I = \mathbf{B}W_I\mathbf{B}$ et nous notons \mathbf{L}_I l'unique sous-groupe de Levi de \mathbf{P}_I contenant \mathbf{T} . Alors Φ_I est le système de racines de \mathbf{L}_I relativement à \mathbf{T} et W_I est le groupe de Weyl de \mathbf{L}_I relativement à \mathbf{T} .

4. CALCUL DE $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$

4.A. Le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et le système de racines de \mathbf{G} . Calculer $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et calculer $X(\mathcal{Z}(\mathbf{G})) \simeq \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ sont des problèmes équivalents. Puisque

$$\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = \{t \in \mathbf{T} \mid \forall \alpha \in \Phi, \alpha(t) = 1\},$$

on a, d'après 1.7 et 1.9 :

Proposition 4.1. *Le morphisme canonique $X(\mathbf{T}) \rightarrow X(\mathbf{Z}(\mathbf{G}))$ induit un isomorphisme de groupes abéliens*

$$X(\mathcal{Z}(\mathbf{G})) \simeq (X(\mathbf{T}) / \langle \Phi \rangle)_{p'}.$$

De plus, $\tilde{i}_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}$ induit un isomorphisme

$$(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}\varpi_\alpha^\vee / Y(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ))_{p'} \simeq \mathcal{Z}(\mathbf{G}).$$

4.B. Sous-groupes de Levi. Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi de \mathbf{G} . Alors :

Proposition 4.2. *Le morphisme $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ induit par l'inclusion $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathbf{Z}(\mathbf{L})$ est surjectif.*

DÉMONSTRATION - On peut supposer (et nous le ferons) que $\mathbf{L} = \mathbf{L}_I$ pour une partie I de Δ . Alors $\langle \Phi_I \rangle$ est un facteur direct de $\langle \Phi \rangle$, donc $(X(\mathbf{T}) / \langle \Phi_I \rangle)_{p'} \rightarrow (X(\mathbf{T}) / \langle \Phi \rangle)_{p'}$ est injectif. Donc, d'après la proposition 4.1, le morphisme naturel $X(\mathcal{Z}(\mathbf{L})) \rightarrow X(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ est injectif. ■

Corollaire 4.3. *Le groupe $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ agit trivialement sur $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$.*

Corollaire 4.4. *Soit $\tilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe de Levi de $\tilde{\mathbf{G}}$. Alors $\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{L}})$ est connexe.*

Le morphisme surjectif $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ sera noté $h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ (ou bien $h_{\mathbf{L}}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté). Son morphisme dual sera noté $\hat{h}_{\mathbf{L}} : \mathcal{Z}(\mathbf{L})^{\wedge} \hookrightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})^{\wedge}$. Une fois que $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ est déterminé, le calcul de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ est équivalent au calcul de $\text{Ker } h_{\mathbf{L}}$. La proposition suivante complète la proposition 4.1.

Proposition 4.5 (Digne-Lehrer-Michel). *Soit I une partie de Δ . Alors $\text{Ker } h_{\mathbf{L}_I}$ est engendré par $(\tilde{\iota}_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ}}(\varpi_{\alpha}^{\vee}))_{\alpha \in \Delta - I}$.*

DÉMONSTRATION - En remplaçant \mathbf{G} par $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ}$ si c'est nécessaire, on peut supposer que $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ} = 1$. Soit $X_I = X(\mathbf{T}) \cap (< \Phi_I > \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. Alors $X_I = X(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^{\circ})$. Mais, si $\alpha \in \Delta - I$ et si $x \in X_I$, alors $< x, \varpi_{\alpha}^{\vee} >_{\mathbf{T}} = 0$. Donc $\tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(\varpi_{\alpha}^{\vee}) \in \text{Ker } h_{\mathbf{L}_I}$.

Réciproquement, soit $z \in \text{Ker } h_{\mathbf{L}_I} = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^{\circ} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. Il existe donc $y \in Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^{\circ}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que $z = \tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(y)$. Mais, $(\varpi_{\alpha}^{\vee})_{\alpha \in \Delta - I}$ est une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel $Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^{\circ}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Donc

$$y = \sum_{\alpha \in \Delta - I} r_{\alpha} \varpi_{\alpha}^{\vee},$$

avec $r_{\alpha} \in \mathbb{Q}$ (pour tout $\alpha \in \Delta - I$). Si on pose

$$y' = \sum_{\alpha \in \Delta - I} (r_{\alpha})_{p'} \varpi_{\alpha}^{\vee},$$

alors $z = \tilde{\iota}(y')$. Mais, puisque $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$, on a, pour tout $\alpha \in \Delta - I$, $< \alpha, y' > = (r_{\alpha})_{p'} \in \mathbb{Z}[1/p]$. Donc $(r_{\alpha})_{p'} \in \mathbb{Z}$, ce qui montre que

$$z = \prod_{\alpha \in \Delta - I} \tilde{\iota}(\varpi_{\alpha}^{\vee})^{(r_{\alpha})_{p'}}.$$

Cela termine la preuve de la proposition 4.5. ■

La proposition 4.5 entraîne le résultat suivant (dont une preuve différente peut être trouvée par exemple dans [Bon6, proposition 2.4]).

Corollaire 4.6. *Soient I et J deux parties de Δ . Alors $\text{Ker } h_{\mathbf{L}_{I \cap J}} = (\text{Ker } h_{\mathbf{L}_I}).(\text{Ker } h_{\mathbf{L}_J})$.*

Corollaire 4.7. *Soit I une partie de Δ . Alors $\text{Ker } h_{\mathbf{L}_I} = \text{Ker } h_{\mathbf{L}_{I(\infty)}}$.*

4.C. Les groupes $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et $\text{Ker}' i^*$. Dans cette sous-section, nous construisons un isomorphisme entre les groupes $\text{Ker}' i^*$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^{\wedge}$. Pour cela, remarquons tout d'abord que

$$X(\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})) \simeq (< \tilde{\Phi} > \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]) \cap X(\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})).$$

Identifions $i_X : X(\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})) \rightarrow X(\mathbf{T})$ et $i_Y^* : Y(\tilde{\mathbf{T}}^* \cap \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{G}}^*)) \rightarrow Y(\mathbf{T}^*)$. Alors l'image de i_X contient $< \Phi >$ et est contenue dans $(< \Phi > \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]) \cap X(\mathbf{T})$. D'après la proposition 1.11, on obtient alors un isomorphisme de groupes abéliens finis

$$(X(\mathbf{T}) / < \Phi >)_{p'} \simeq \text{Ker}' i^*,$$

ce qui, en composant avec l'isomorphisme de la proposition 4.1, fournit un isomorphisme

$$X(\mathcal{Z}(\mathbf{G})) \simeq \text{Ker}' i^*.$$

Grâce à l'isomorphisme 1.8, on obtient finalement un isomorphisme

$$(4.8) \quad \omega : \text{Ker}' i^* \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})^{\wedge}.$$

Cet isomorphisme peut être décrit de la façon suivante. Soit $a \in \text{Ker}' i^*$ et soit $n \in \mathbb{Z}$, premier à p , tel que $a^n = 1$. Alors il existe $\tilde{x} \in X(\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})) \simeq Y(\tilde{\mathbf{T}}^* \cap \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{G}}^*))$ tel que $\tilde{x}(\tilde{\iota}(1/n)) = a$ et il existe $x \in X(\mathbf{T})$ tel que $i_X(\tilde{x}) = nx$. En fait, $x \in X(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ})$ et

$$(4.9) \quad \omega(a) = \kappa \circ \text{Res}_{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}^{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ}} x.$$

Le résultat suivant est immédiat :

Lemme 4.10. *L'isomorphisme ω ne dépend pas du choix de $\tilde{\mathbf{T}}$ et $\tilde{\mathbf{T}}^*$ (il dépend uniquement du choix de ι et j). De plus, $\omega \circ F^* = F \circ \omega$.*

Les groupes $(\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge)^F$ et $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$ sont canoniquement isomorphes. De même, les groupes $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge)$ et $(\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F)^\wedge$ sont canoniquement isomorphes. Donc, grâce à ω , nous pouvons construire des isomorphismes de groupes

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \omega^0 : (\mathrm{Ker}' i^*)^{F^*} &\longrightarrow H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \\ \omega^1 : H^1(F^*, \mathrm{Ker}' i^*) &\longrightarrow (\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F)^\wedge. \end{aligned}$$

Par dualité, nous obtenons des isomorphismes

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \hat{\omega} : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) &\longrightarrow (\mathrm{Ker}' i^*)^\wedge \\ \hat{\omega}^0 : H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) &\longrightarrow ((\mathrm{Ker}' i^*)^{F^*})^\wedge \\ \hat{\omega}^1 : \mathcal{Z}(\mathbf{G})^F &\longrightarrow H^1(F^*, \mathrm{Ker}' i^*)^\wedge. \end{aligned}$$

Tous ces isomorphismes ne dépendent pas du choix de $\tilde{\mathbf{T}}$ et $\tilde{\mathbf{T}}^*$.

REMARQUE 4.13 - L'isomorphisme ω^0 recevra une autre interprétation dans la section 6 (voir diagramme 6.4). \square

REMARQUE 4.14 - Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi de \mathbf{G} et soit \mathbf{L}^* un sous-groupe de Levi de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{L} . Soient $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$ et $\tilde{\mathbf{L}}^* = i^{*-1}(\mathbf{L}^*)$. Notons $\mathrm{Ker}'_{\tilde{\mathbf{L}}} i^* = \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{L}}^*) \cap \mathrm{Ker} i^*$ et $\omega_{\tilde{\mathbf{L}}} : \mathrm{Ker}'_{\tilde{\mathbf{L}}} i^* \rightarrow \mathcal{Z}(\tilde{\mathbf{L}})^\wedge$ l'isomorphisme analogue de ω obtenu en remplaçant \mathbf{G} par \mathbf{L} . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}'_{\tilde{\mathbf{L}}} i^* & \xrightarrow{\omega_{\tilde{\mathbf{L}}}} & \mathcal{Z}(\tilde{\mathbf{L}})^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow \hat{h}_{\tilde{\mathbf{L}}} \\ \mathrm{Ker}' i^* & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge \end{array}$$

est commutatif. L'application verticale de gauche est bien sûr l'inclusion canonique et rappelons que $\hat{h}_{\tilde{\mathbf{L}}}$ est l'application duale de $h_{\tilde{\mathbf{L}}}$. \square

5. GROUPES SIMPLEMENT CONNEXES

Nous supposons dans cette section, et uniquement dans cette section, que \mathbf{G} est semi-simple, quasi-simple et simplement connexe et que p ne divise pas le cardinal de $X(\mathbf{T}) / \langle \Phi \rangle$. Nous allons aborder le calcul explicite des groupes $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ en utilisant uniquement le système de racines de \mathbf{G} . Le calcul du groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ en termes des poids minuscules est fait dans [Bou2, chapitre VI, §2, corollaire de la proposition 5]. Le calcul du groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ peut alors être fait grâce à la proposition 4.5. En revanche, la proposition 5.4 nous semble nouvelle : elle contient une description de $\mathrm{Ker} h_{\tilde{\mathbf{L}}}$ lorsque I est auto-opposée en termes du groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin affine de \mathbf{G} .

5.A. Poids minuscules. Notons $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de Δ (elle est bien définie car, puisque \mathbf{G} est quasi-simple, Φ est irréductible). Posons

$$\Delta^{\mathrm{aff}} = \Delta \cup \{-\tilde{\alpha}\}$$

et

$$W^{\mathrm{aff}} = W \rtimes Y(\mathbf{T}).$$

Puisque \mathbf{G} est simplement connexe, W^{aff} est le groupe de Weyl affine de Φ . On définit

$$\mathrm{Aut}_W(\Delta^{\mathrm{aff}}) = \{w \in W \mid w(\Delta^{\mathrm{aff}}) = \Delta^{\mathrm{aff}}\}.$$

Alors $\mathrm{Aut}_W(\Delta^{\mathrm{aff}})$ est le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin affine de \mathbf{G} induits par un élément de W . Pour finir, nous aurons besoin des notations suivantes :

$$\Delta_{\mathrm{minus}} = \{\alpha \in \Delta \mid \langle \tilde{\alpha}, \varpi_\alpha^\vee \rangle_{\mathbf{T}} = 1\}$$

et

$$\Delta_{\mathrm{minus}}^{\mathrm{aff}} = \Delta_{\mathrm{minus}} \cup \{-\tilde{\alpha}\}.$$

Posons conventionnellement $\varpi_{-\tilde{\alpha}}^\vee = 0$.

Proposition 5.1. *Supposons \mathbf{G} semi-simple, simplement connexe et quasi-simple. Alors l'application $\Delta_{\text{minus}}^{\text{aff}} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})$, $\alpha \mapsto \tilde{\iota}(\varpi_{\alpha}^{\vee})$ est bijective.*

DÉMONSTRATION - Voir [Bou2, chapitre VI, §2, corollaire de la proposition 5]. ■

5.B. Automorphismes du diagramme de Dynkin affine. Notons C_0 l'alcôve

$$C_0 = \{y \in Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid (\forall \alpha \in \Delta, \langle \alpha, y \rangle_{\mathbf{T}} \geq 0) \text{ et } \langle -\tilde{\alpha}, y \rangle_{\mathbf{T}} \leq 1\}.$$

Soit $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. Soit $y \in Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ tel que $\tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(y) = z$. Puisque $\langle \alpha, y \rangle_{\mathbf{T}} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Phi$, il existe un unique $w \in W^{\text{aff}}$ tel que $w(C_0) = y + C_0$. Nous notons w_z la projection de w sur W . Alors w_z ne dépend que de z et non du choix de y .

Nous allons maintenant rappeler la formule explicite de $w_{\tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(\varpi_{\alpha}^{\vee})}$ pour $\alpha \in \Delta_{\text{minus}}^{\text{aff}}$. Si $\alpha \in \Delta^{\text{aff}}$, nous notons $w_{\alpha} = w_{\Delta} w_{\Delta \setminus \{\alpha\}}$ (remarquons que $w_{-\tilde{\alpha}} = 1$). Alors on a, pour tout $\alpha \in \tilde{\Delta}$,

$$(5.2) \quad w_{\tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(\varpi_{\alpha}^{\vee})} = w_{\alpha}$$

(voir [Bou2, chapitre VI, §2, proposition 6]).

La proposition suivante est démontrée dans [Bou2, §2.3]

Proposition 5.3. *Supposons \mathbf{G} semi-simple, quasi-simple et simplement connexe. Alors l'application $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow \text{Aut}_W(\Delta^{\text{aff}})$, $z \mapsto w_z$ est bien définie ; c'est un isomorphisme de groupes.*

Compte tenu du corollaire 4.7, on peut, pour calculer $\text{Ker } h_{\mathbf{L}_I}$, se ramener au cas où I est auto-opposée. Dans ce cas, la proposition suivante en fournit une description en termes du groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin affine de \mathbf{G} .

Proposition 5.4. *Supposons \mathbf{G} semi-simple, quasi-simple et simplement connexe. Si I est une partie auto-opposée de Δ , alors*

$$\text{Ker } h_{\mathbf{L}_I} = \{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \mid w_z(I) = I\}.$$

DÉMONSTRATION - Soit $\alpha \in \Delta$. Compte tenu de 5.2 et de la proposition 4.5, il suffit de montrer que $w_{\alpha}(I) = I$ si et seulement si $\alpha \in \Delta - I$. Tout d'abord, si $\alpha \in \Delta - I$, alors $w_{\Delta - \{\alpha\}}(I) = -I$ et $w_{\Delta}(I) = -I$ car I est auto-opposée. Donc $w_{\alpha}(I) = I$. Réciproquement, si $\alpha \in I$, alors $w_{\Delta - \{\alpha\}}(\alpha) \in \Phi^+$ et donc $w_{\alpha}(\alpha) \in \Phi^-$. Par suite, $w_{\alpha}(\alpha) \notin I$, ce qui montre que $w_{\alpha}(I) \neq I$. ■

6. LE GROUPE $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$

6.A. Morphisme vers $\text{Out}(\mathbf{G}^F)$. Commençons par un rappel élémentaire :

Lemme 6.1. *On a $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})$.*

DÉMONSTRATION - Nous verrons dans §14.A qu'il existe un élément unipotent $u \in \mathbf{B}_0^F$ tel que $C_{\mathbf{G}}(u) = \mathbf{Z}(\mathbf{G}).C_{\mathbf{U}_0}(u)$. Donc $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) \subset C_{\mathbf{G}}(u) = \mathbf{Z}(\mathbf{G}).C_{\mathbf{U}_0}(u)$. Si on note w_0 un élément de \mathbf{G}^F représentant l'élément de plus grande longueur de W_0 , alors $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) \subset C_{\mathbf{G}}(w_0 u w_0^{-1}) = \mathbf{Z}(\mathbf{G}).^{w_0} C_{\mathbf{U}_0}(u)$. Donc $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) \subset C_{\mathbf{G}}(u) \cap C_{\mathbf{G}}(w_0 u w_0^{-1}) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. D'autre part, il est clair que $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \subset C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F)$. D'où le résultat. ■

REMARQUE 6.2 - Le lemme 6.1 montre en particulier que le centre de \mathbf{G}^F est $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$. □

Nous notons $\text{Aut}(\mathbf{G}, F)$ le groupe des automorphismes de \mathbf{G} commutant avec F . Alors le groupe $\text{Int}(\mathbf{G}^F)$ des automorphismes de \mathbf{G} induits par la conjugaison par un élément de \mathbf{G}^F est un sous-groupe distingué de $\text{Aut}(\mathbf{G}, F)$. D'après la remarque 6.2, le groupe $\text{Int}(\mathbf{G}^F)$ est isomorphe au groupe des automorphismes intérieurs de \mathbf{G}^F , ce qui justifie la notation utilisée. Nous notons $\text{Out}(\mathbf{G}, F)$ le groupe quotient $\text{Aut}(\mathbf{G}, F) / \text{Int}(\mathbf{G}^F)$. On a un morphisme canonique $\text{Out}(\mathbf{G}, F) \rightarrow \text{Out}(\mathbf{G}^F)$.

Si $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, nous notons g_z un élément de \mathbf{G} tel que $g_z^{-1} F(g_z)$ appartient à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et représente z . Alors l'automorphisme intérieur $\text{int } g_z$ appartient à $\text{Aut}(\mathbf{G}, F)$. On note $\tau_z^{\mathbf{G}}$ son image dans $\text{Out}(\mathbf{G}^F)$.

Proposition 6.3. *L'application $\tau^{\mathbf{G}} : H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) \rightarrow \text{Out}(\mathbf{G}^F)$, $z \mapsto \tau_z^{\mathbf{G}}$ est bien définie : c'est un morphisme injectif de groupes.*

DÉMONSTRATION - Soient $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et soient g et h deux éléments de \mathbf{G} tels que $h^{-1}F(h)$ et $g^{-1}F(g)$ appartiennent à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et représentent z . Alors il existe $x \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ tel que $x^{-1}F(x)h^{-1}F(h) = g^{-1}F(g)$. Puisque x est central dans \mathbf{G} , on a $F(gh^{-1}x^{-1}) = gh^{-1}x^{-1}$. Posons $y = gh^{-1}x^{-1}$. Alors $y \in \mathbf{G}^F$ et $\text{int } g = \text{int}(y) \circ \text{int}(hx) = \text{int}(y) \circ \text{int}(h)$. Donc l'image de $\text{int } g$ dans $\text{Out}(\mathbf{G}, F)$ coïncide avec l'image de $\text{int } h$. Cela montre que $\tau^{\mathbf{G}}$ est bien définie.

Montrons maintenant que c'est un morphisme de groupes. Soient z et z' deux éléments de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et soient g et g' deux éléments de \mathbf{G} tels que $g^{-1}F(g)$ et $g'^{-1}F(g')$ appartiennent à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et représentent respectivement z et z' . Alors, si on pose $a = (gg')^{-1}F(gg')$, on a $a = g'^{-1}g^{-1}F(g)F(g') = g'^{-1}F(g')g^{-1}F(g)$ car $g^{-1}F(g)$ est central. Donc $a \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et a représente zz' . Mais $\text{int}(gg') = \text{int}(g) \circ \text{int}(g')$, donc $\tau_{zz'}^{\mathbf{G}} = \tau_z^{\mathbf{G}} \circ \tau_{z'}^{\mathbf{G}}$. Par conséquent, $\tau^{\mathbf{G}}$ est bien un morphisme de groupes.

Pour finir, montrons que $\tau^{\mathbf{G}}$ est injectif. Soit $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et soit $g \in \mathbf{G}$ tel que $g^{-1}F(g)$ appartient à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et représente z . Supposons que $\text{int}(g)$ induit un automorphisme intérieur de \mathbf{G}^F . Alors il existe $h \in \mathbf{G}^F$ tel que $h^{-1}g \in C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ (voir lemme 6.1). Donc, si on pose $a = h^{-1}g$, alors $g^{-1}F(g) = (ha)^{-1}F(ha) = a^{-1}F(a)$ car $F(h) = h$. Donc $z = 1$. ■

REMARQUE - Le morphisme de groupes $\text{Out}(\mathbf{G}, F) \rightarrow \text{Out}(\mathbf{G}^F)$ est en général non injectif. Par exemple, si \mathbf{G} est un tore, si $\delta = 1$, et si \mathbf{G} est déployé sur \mathbb{F}_q , alors tout automorphisme de \mathbf{G} commute avec F , donc $\text{Out}(\mathbf{G}, F) = \text{Aut}(\mathbf{G})$ car \mathbf{G} est abélien. Mais, si $n = \dim \mathbf{G}$, on a $\text{Aut}(\mathbf{G}) \simeq \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ et $\text{Aut}(\mathbf{G}^F) \simeq \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})$, donc le morphisme $\text{Aut}(\mathbf{G}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{G}^F)$ a un noyau infini lorsque $n \geq 2$. □

Le groupe $\text{Out}(\mathbf{G}^F)$ agit sur $\text{Cent } \mathbf{G}^F$ et $\text{Irr } \mathbf{G}^F$ de la façon suivante : si $\tau \in \text{Out}(\mathbf{G}^F)$ et si χ appartient à $\text{Cent } \mathbf{G}^F$ ou $\text{Irr } \mathbf{G}^F$, on pose $\tau(\chi) = \chi \circ \tilde{\tau}^{-1}$, où $\tilde{\tau}$ est un automorphisme de \mathbf{G}^F représentant τ . Cela nous définit donc, à travers le morphisme $\tau^{\mathbf{G}}$, une action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ sur $\text{Cent } \mathbf{G}^F$ et $\text{Irr } \mathbf{G}^F$. Si V est un sous-espace de $\text{Cent}(\mathbf{G}^F)$ stable sous l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et si $\zeta \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$, nous noterons V_ζ la composante ζ -isotypique de V . On a donc $V_\zeta = V \cap \text{Cent}(\mathbf{G}^F)_\zeta$.

6.B. Le groupe $\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F$. Soit $\tilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe de Levi de $\tilde{\mathbf{G}}$. On suppose ici que $\tilde{\mathbf{L}}$ est F -stable. On pose $\mathbf{L} = \mathbf{G} \cap \tilde{\mathbf{L}}$. Alors \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} . Le morphisme de groupes $h_{\mathbf{L}}^1 : H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) \rightarrow H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{L}))$ induit par $h_{\mathbf{L}}$ est surjectif. S'il y a ambiguïté, nous le noterons $h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}, 1}$.

Soit $\tilde{l} \in \tilde{\mathbf{L}}^F$. Alors il existe $l \in \mathbf{L}$ et $\tilde{z} \in \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$ tels que $\tilde{l} = l\tilde{z}$. Puisque $F(\tilde{l}) = \tilde{l}$, on en déduit que $l^{-1}F(l) = F(\tilde{z})^{-1}\tilde{z}$. Donc $l^{-1}F(l) \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. On note $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\tilde{l})$ sa classe dans $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Il est facile de vérifier que $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\tilde{l})$ ne dépend que de \tilde{l} et non du choix de l et \tilde{z} . Il est tout aussi immédiat que $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ induit un isomorphisme de groupes (toujours noté $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$)

$$\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F \xrightarrow{\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}} H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})).$$

D'autre part, on a un morphisme canonique

$$\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F \longrightarrow \text{Out}(\mathbf{L}^F)$$

et un simple calcul montre que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F & \xrightarrow{\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}} & H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) \\ \downarrow & & \downarrow h_{\mathbf{L}}^1 \\ \text{Out}(\mathbf{L}^F) & \xleftarrow{\tau^{\mathbf{L}}} & H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{L})) \end{array}$$

est commutatif. Lorsque $\mathbf{L} = \mathbf{G}$, l'isomorphisme $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ sera noté $\sigma_{\mathbf{G}}$. De plus, l'isomorphisme dual de $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ sera noté $\hat{\sigma}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \xrightarrow{\sim} (\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F)^\wedge$ (ou $\hat{\sigma}_{\mathbf{G}}$ si $\mathbf{L} = \mathbf{G}$).

En utilisant l'isomorphisme $\omega^0 : (\text{Ker}' i^*)^{F^*} \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$ (voir 4.11), on obtient un diagramme commutatif :

$$(6.4) \quad \begin{array}{ccc} & (\text{Ker}' i^*)^{F^*} & \xrightarrow{\quad} (\text{Ker} i^*)^{F^*} \\ \omega^0 \swarrow & & \downarrow \sim \\ H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge & & (\tilde{\mathbf{L}}^F / \mathbf{L}^F)^\wedge \\ \delta_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \searrow & & \downarrow \\ & (\tilde{\mathbf{L}}^F / \mathbf{L}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F)^\wedge & \xrightarrow{\quad} (\tilde{\mathbf{L}}^F / \mathbf{L}^F)^\wedge \end{array}$$

DÉMONSTRATION DE 6.4 - Soit $\tilde{\mathbf{T}}$ un tore maximal F -stable de $\tilde{\mathbf{L}}$. Soit $\tilde{\mathbf{T}}^*$ un tore maximal F^* -stable de $\tilde{\mathbf{G}}$ dual de $\tilde{\mathbf{T}}$. Posons $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{T}^* = i^*(\tilde{\mathbf{T}}^*)$. Puisque $\tilde{\mathbf{L}}^F / \mathbf{L}^F \simeq \tilde{\mathbf{T}}^F / \mathbf{T}^F$, il suffit de montrer la commutativité du diagramme 6.4 lorsque $\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{T}}$, ce que nous supposons dorénavant.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\omega_n^0 : (\text{Ker}' i^*)^{F^{*n}} \rightarrow H^1(F^n, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ induit par ω . Notons

$$\beta_n : (\text{Ker}' i^*)^{F^{*n}} \rightarrow (\tilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge$$

le morphisme composé $(\text{Ker}' i^*)^{F^{*n}} \rightarrow (\text{Ker} i^*)^{F^{*n}} \xrightarrow{\sim} (\tilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge$ et

$$\gamma_n : H^1(F^n, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \rightarrow (\tilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge$$

le morphisme composé $H^1(F^n, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \rightarrow (\tilde{\mathbf{T}}^{F^n} / \mathbf{T}^{F^n} \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^{F^n})^\wedge \rightarrow (\tilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge$. Il s'agit de montrer que $\gamma_1 \circ \omega_1^0 = \beta_1$. Mais, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & (\text{Ker}' i^*)^{F^*} & & & \\ \omega_1^0 \swarrow & \downarrow & \searrow \beta_1 & & \\ H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge & \xrightarrow{\gamma_1} & & & (\tilde{\mathbf{T}}^F)^\wedge \\ \downarrow & & & & \downarrow N_{F^n/F}^\wedge \\ & (\text{Ker}' i^*)^{F^{*n}} & & & \\ \omega_n^0 \swarrow & \downarrow & \searrow \beta_n & & \\ H^1(F^n, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge & \xrightarrow{\gamma_n} & & & (\tilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge \end{array}$$

est commutatif. Ici, toutes les applications verticales sont injectives. En particulier, cela montre qu'il suffit de montrer que $\gamma_n \circ \omega_n^0 = \beta_n$ et donc que l'on peut remplacer F par n'importe laquelle de ses puissances. Par exemple, et c'est ce que nous ferons par la suite, nous pouvons supposer que F est un endomorphisme de Frobenius déployé de $\tilde{\mathbf{T}}$ (sur un corps fini à q éléments) et que F agit trivialement sur $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. En particulier, F^* est un endomorphisme de Frobenius déployé de $\tilde{\mathbf{T}}^*$ et F^* agit trivialement sur $\text{Ker}' i^*$.

Soit $a \in \text{Ker}' i^* = (\text{Ker}' i^*)^{F^*}$ et soit $\tilde{t} \in \tilde{\mathbf{T}}^F$. Puisque F^* est déployé, il existe $\tilde{y} \in Y(\tilde{\mathbf{T}}^* \cap \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{G}}^*)) \simeq X(\tilde{\mathbf{T}} / \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})) \subset X(\tilde{\mathbf{T}})$ tel que $a = y(\tilde{t}(1/(q-1)))$. Soit alors $y \in Y(\mathbf{T}^*) \simeq X(\mathbf{T})$ tel que $i_X(\tilde{y}) = (q-1)y$. Soient maintenant $t \in \mathbf{T}$ et $\tilde{z} \in \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$ tels que $\tilde{t} = t\tilde{z}$. Posons $z = t^{-1}F(t) \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. D'après 1.15 et 4.9, il suffit de montrer que $\tilde{y}(\tilde{t}) = y(z)$. Mais,

$$y(z) = y(t^{-1}F(t)) = y(t^{q-1}) = ((q-1)y)(t) = i_X(\tilde{y})(t) = \tilde{y}(\tilde{t}).$$

Cela montre le résultat car $t\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}}) = \tilde{t}\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$ et $\tilde{y} \in X(\tilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}}))$. ■

7. CUSPIDALITÉ

7.A. Définition et premières propriétés. Le groupe réductif \mathbf{G} est dit *cuspidal* si, pour tout sous-groupe de Levi \mathbf{L} propre de \mathbf{G} , on a $\text{Ker } h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \neq \{1\}$ (voir [Bon3, §1] ou [Bon6, §2.C]). Nous rappelons ici quelques propriétés des groupes cuspidaux dont le lecteur pourra trouver une preuve dans [Bon6, propositions 2.12 et 2.18 et remarque 2.14].

Proposition 7.1. *Supposons que \mathbf{G} est cuspidal. Alors :*

- (a) *Si $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ est un morphisme isotypique, alors $\hat{\mathbf{G}}$ est cuspidal.*
- (b) *Le groupe \mathbf{G} est universellement auto-opposé.*
- (c) *Toutes les composantes quasi-simples de \mathbf{G} sont de type A.*

7.B. Sous-groupes de Levi cuspidaux. Si K est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$, nous notons $\mathcal{L}(K)$ (ou $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(K)$ s'il y a ambiguïté) l'ensemble des sous-groupes de Levi de \mathbf{G} tels que $\text{Ker } h_{\mathbf{L}} \subset K$. Nous notons $\mathcal{L}_{\min}(K)$ (ou $\mathcal{L}_{\min}^{\mathbf{G}}(K)$) l'ensemble des éléments minimaux pour l'inclusion de $\mathcal{L}(K)$. La preuve de la proposition suivante peut être trouvée dans [Bon6, lemme 2.16] :

Proposition 7.2. *Si K est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$, alors $\mathcal{L}_{\min}(K)$ est une seule classe de conjugaison de sous-groupes de \mathbf{G} . De plus, ses éléments sont cuspidaux.*

Il est facile, en utilisant entre autres la proposition 5.4, de classifier les groupes $\mathcal{L}_{\min}(K)$ lorsque \mathbf{G} est semi-simple, quasi-simple et simplement connexe. Cette classification est faite dans [Bon6, table 2.17]. Nous la rappelons dans la table 7.3 (cette table ne contient pas les groupes $\mathcal{L}_{\min}(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ car ce sont les tores maximaux de \mathbf{G}). Pour pouvoir lire cette table, il convient de signaler que les copoids fondamentaux en type D_{2r} sont numérotés comme dans [Bou2, planches]). La classification dans le cas général découle de [Bon6, §2.B].

7.C. Caractères linéaires cuspidaux. Un caractère linéaire $\zeta : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}^{\times}$ est dit *cuspidal* si, pour tout sous-groupe de Levi propre \mathbf{L} de \mathbf{G} , on a $\text{Ker } h_{\mathbf{L}} \not\subset \text{Ker } \zeta$. Nous noterons $\mathcal{Z}_{\text{cus}}^{\wedge}(\mathbf{G})$ l'ensemble des caractères linéaires cuspidaux de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Si $\mathcal{Z}_{\text{cus}}^{\wedge}(\mathbf{G}) \neq \emptyset$, alors \mathbf{G} est cuspidal. En particulier, toutes ses composantes quasi-simples sont de type A (voir proposition 7.1 (c)).

8. ÉLÉMENTS SEMI-SIMPLES ET NON CONNEXITÉ DU CENTRE

Hypothèse : *Nous fixons dans cette section un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$. Nous fixons aussi un élément semi-simple $\tilde{s} \in \mathbf{G}^{*F^*}$ tel que $i^*(\tilde{s}) = s$.*

L'existence de \tilde{s} est assurée par le théorème de Lang et la connexité de $\text{Ker } i^*$.

8.A. Centralisateur de s . Soit \mathbf{B}_1^* un sous-groupe de Borel F^* -stable de $C_{\mathbf{G}^*}^{\circ}(s)$ et soit \mathbf{T}_1^* un tore maximal F^* -stable de \mathbf{B}_1^* . On note W (respectivement $W(s)$, respectivement $W^{\circ}(s)$) le groupe de Weyl de \mathbf{G}^* (respectivement $C_{\mathbf{G}^*}(s)$, respectivement $C_{\mathbf{G}^*}^{\circ}(s)$) relativement à \mathbf{T}_1^* . Alors

$$W(s) = \{w \in W \mid w(s) = s\}$$

et $W^{\circ}(s)$ est un sous-groupe distingué de $W(s)$. De plus, $W(s)/W^{\circ}(s)$ est canoniquement isomorphe à $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Soit $A(s) = \{w \in W(s) \mid {}^w\mathbf{B}_1^* = \mathbf{B}_1^*\}$. Alors $A(s)$ est un sous-groupe F^* -stable de $W(s)$ et $W(s) = W^{\circ}(s) \rtimes A(s)$. Donc $A(s)$ est canoniquement isomorphe à $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Nous identifierons par la suite $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ avec $A(s)$, de sorte que

$$(8.1) \quad W(s) = W^{\circ}(s) \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s).$$

Soit Φ_1 (respectivement Φ_s) le système de racines de \mathbf{G}^* (respectivement $C_{\mathbf{G}^*}^{\circ}(s)$) relativement à \mathbf{T}_1^* . Alors

$$\Phi_s = \{\alpha \in \Phi_1 \mid \alpha(s) = 1\}.$$

Pour tout $w \in W(s)$, l'automorphisme $q^{-1/\delta} w F^*$ de $X(\mathbf{T}_1^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est d'ordre fini o_w . Soit N le plus petit commun multiple de $(o_w)_{w \in W(s)}$. On notera ϕ_1 un générateur d'un groupe cyclique $\langle \phi_1 \rangle$ d'ordre N

Type de \mathbf{G}	$\mathcal{Z}(\mathbf{G})$	K	Type de $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{\min}(K)$	$\mathcal{Z}(\mathbf{L})$	Diagramme de (\mathbf{G}, \mathbf{L})
A_r	μ_{r+1}	$\mu_{r+1/d}$ où $d \mid r+1$ et $p \nmid d$	$\underbrace{A_{d-1} \times \cdots \times A_{d-1}}_{\frac{r+1}{d} \text{ fois}}$	μ_d	
B_{2r+1} $p \neq 2$	μ_2	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r+1 \text{ fois}}$	μ_2	
B_{2r} $p \neq 2$	μ_2	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_r \text{ fois}$	μ_2	
C_r $p \neq 2$	μ_2	1	A_1 (grande racine)	μ_2	
D_{2r+1} $p \neq 2$	μ_4	1 μ_2	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r-1 \text{ fois}} \times A_3$ $A_1 \times A_1$	μ_4 μ_2	
D_{2r} $p \neq 2$	$\mu_2 \times \mu_2$	1 $\langle \tilde{t}_{\mathbf{T}}(\varpi_{2r-1}^\vee) \rangle$ $\langle \tilde{t}_{\mathbf{T}}(\varpi_{2r}^\vee) \rangle$ $\langle \tilde{t}_{\mathbf{T}}(\varpi_1^\vee) \rangle$	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r+1 \text{ fois}}$ $\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_r \text{ fois}$ $\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_r \text{ fois}$ $A_1 \times A_1$	$\mu_2 \times \mu_2$ μ_2 μ_2 μ_2	
E_6 $p \neq 3$	μ_3	1	$A_2 \times A_2$	μ_3	
E_7 $p \neq 2$	μ_2	1	$A_1 \times A_1 \times A_1$	μ_2	

Table 7.3

et nous ferons agir ϕ_1 sur $X(\mathbf{T}_1)^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ comme $q^{-1/\delta} F^*$. Ainsi, ϕ_1 normalise $W(s)$ et, si $w \in W(s)$, on a $\phi_1 w \phi_1^{-1} = F^*(w)$. On peut donc définir le produit semi-direct $W(s) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$.

Le but de cette sous-section est de relier le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ aux groupes $\text{Ker}' i^*$, $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ et $(\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F)^\wedge$. Tout d'abord, considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_s : C_{\mathbf{G}^*}(s) &\longrightarrow \text{Ker}' i^* \\ g &\longmapsto [\tilde{g}, \tilde{s}] = \tilde{g} \tilde{s} \tilde{g}^{-1} \tilde{s}^{-1} \end{aligned}$$

où, pour tout $g \in C_{\mathbf{G}^*}(s)$, \tilde{g} désigne un élément de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ tel que $i^*(\tilde{g}) = g$. Alors $\varphi_s(g)$ ne dépend ni du choix de \tilde{g} ni du choix de \tilde{s} . Puisque $\text{Ker}' i^*$ est central, φ_s est un morphisme de groupes et le noyau de φ_s est $i^*(C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s}))$. Mais, d'après le théorème 3.5 et par exemple [DiMi2, Proposition 2.3], on a $i^*(C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})) = C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ donc φ_s induit un morphisme injectif de groupes encore noté

$$(8.2) \quad \varphi_s : A_{\mathbf{G}^*}(s) \hookrightarrow \text{Ker}' i^*.$$

Ce morphisme commute à l'action de F^* . Comme conséquence, on obtient le

Lemme 8.3. *Le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est abélien et, via φ_s ,*

$$A_{\mathbf{G}^*}(s) \simeq \{z \in \text{Ker}' i^* \mid \tilde{s} \text{ et } \tilde{s}z \text{ sont conjugués dans } \tilde{\mathbf{G}}^*\}.$$

Par dualité, φ_s induit un morphisme surjectif $\hat{\varphi}_s : (\text{Ker}' i^*)^\wedge \rightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)^\wedge$ et, par composition avec les isomorphismes ω , ω^0 , ω^1 , $\hat{\omega}$, $\hat{\omega}^0$ et $\hat{\omega}^1$, on obtient des morphismes

$$\begin{aligned} \omega_s : A_{\mathbf{G}^*}(s) &\hookrightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge, \\ \omega_s^0 : A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*} &\hookrightarrow H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge, \\ \omega_s^1 : H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s)) &\longrightarrow (\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F)^\wedge, \\ \hat{\omega}_s : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) &\twoheadrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)^\wedge, \\ \hat{\omega}_s^0 : H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) &\twoheadrightarrow (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge, \\ \hat{\omega}_s^1 : \mathcal{Z}(\mathbf{G})^F &\longrightarrow H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))^\wedge. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Les morphismes ω_s et ω_s^0 sont injectifs tandis que les morphismes $\hat{\omega}_s$ et $\hat{\omega}_s^0$ sont surjectifs. On ne peut cependant rien dire en général concernant les morphismes ω_s^1 et $\hat{\omega}_s^1$.

8.B. Sous-groupes de Levi. Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} et soit \mathbf{L}^* un sous-groupe de Levi F^* -stable de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{L} . Supposons que $s \in \mathbf{L}^{*F^*}$. Le morphisme injectif $C_{\mathbf{L}^*}(s) \hookrightarrow C_{\mathbf{G}^*}(s)$ induit un morphisme injectif $A_{\mathbf{L}^*}(s) \hookrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)$. En effet, le noyau du morphisme naturel $C_{\mathbf{L}^*}(s) \rightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s) \cap \mathbf{L}^*$. Mais, puisque $\mathbf{L}^* = C_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^\circ)$, on a $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s) \cap \mathbf{L}^* = C_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)}(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^\circ)$. Le résultat découle alors de ce que le centralisateur d'un tore dans un groupe connexe est connexe [Bor, corollaire 11.12]. Il est d'autre part facile de voir que le diagramme

$$(8.5) \quad \begin{array}{ccc} A_{\mathbf{L}^*}(s) & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathbf{G}^*}(s) & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge, \end{array}$$

est commutatif. De plus, toutes les applications sont injectives. En effet, l'injectivité de l'application verticale de droite résulte de la proposition 4.2 et l'injectivité de l'autre application verticale a été discutée ci-dessus.

En prenant les points fixes sous F et F^* et en dualisant, on obtient un autre diagramme commutatif

$$(8.6) \quad \begin{array}{ccc} H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\hat{\omega}_s^0} & (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge \\ h_{\mathbf{L}}^1 \downarrow & & \downarrow \text{Res} \\ H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{L})) & \xrightarrow{\hat{\omega}_{\mathbf{L},s}^0} & (A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*})^\wedge. \end{array}$$

8.C. Centralisateurs de sous-tores. Fixons maintenant un groupe fini H d'automorphismes de $X(\mathbf{T}_1^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ tel que, si $h \in H$ et $\alpha \in \Phi_1$, alors $h(\alpha)$ soit un multiple réel d'une racine de Φ_1 . Cela définit une action de H par permutation sur les racines que nous noterons $h * \alpha$: elle est définie ainsi

$$h * \alpha \in \Phi_1 \cap \mathbb{R}_+^\times h(\alpha).$$

Notons Y^H le \mathbb{R} -espace vectoriel des points fixes de H dans son action sur $Y(\mathbf{T}_1^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Posons

$$\Phi_H = \{\alpha \in \Phi_1 \mid \forall v \in Y^H, \langle \alpha, v \rangle_{\mathbf{T}_1^*} = 0\}.$$

Alors Φ_H est le système de racines relativement à \mathbf{T}_1^* d'un sous-groupe de Levi \mathbf{L}^* de \mathbf{G}^* . Soit \mathbf{L} le sous-groupe de Levi de \mathbf{G} dont le système de coracines est Φ_H . Nous noterons $W_{\mathbf{L}}$ le groupe de Weyl de \mathbf{L}^* relativement à \mathbf{T}^* , $W_{\mathbf{L}}(s)$ le centralisateur de s dans $W_{\mathbf{L}}$, $W_{\mathbf{L}}^\circ(s)$ le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)$ relativement à \mathbf{T}_1^* . Alors

Proposition 8.7. *Supposons que H stabilise Φ_s^+ (pour l'action $*$). Alors :*

- (a) $C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s) = \mathbf{T}_1^*$, c'est-à-dire $W_{\mathbf{L}}^\circ(s) = 1$.
- (b) $W_{\mathbf{L}}(s)^H \subset A_{\mathbf{G}^*}(s)^H$.
- (c) $W_{\mathbf{L}}(s)^H$ commute avec $W^\circ(s)^H$.

DÉMONSTRATION - (a) Soit $\alpha \in \Phi_H \cap \Phi_s^+$ et soit $y \in Y(\mathbf{T}_1^*)$. Alors $\langle \alpha, \sum_{h \in H} h(y) \rangle_{\mathbf{T}_1^*} = 0$ par définition de Φ_H . Mais,

$$\langle \alpha, \sum_{h \in H} h(y) \rangle_{\mathbf{T}_1^*} = \langle \sum_{h \in H} h(\alpha), y \rangle_{\mathbf{T}_1^*}.$$

Donc, $\sum_{h \in H} h(\alpha) = 0$, ce qui est impossible car H stabilise Φ_s^+ (dans son action $*$). Donc $\Phi_H \cap \Phi_s = \emptyset$, ce qui montre (a).

Avant de continuer, introduisons quelques notations. Il existe $v \in Y(\mathbf{T}_1^*)$ tel que $\langle \alpha, v \rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi_s^+$. Posons $v_0 = \sum_{h \in H} h(v)$. Alors $v_0 \in Y^H$ et $\langle \alpha, v_0 \rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi_s^+$ car H stabilise Φ_s^+ (via l'action $*$).

(b) Soit $w \in W_{\mathbf{L}}(s)^H$ et soit $\alpha \in \Phi_s^+$. Posons $f(\alpha) = \sum_{h \in H} h(\alpha)$. Alors $\langle f(\alpha), v_0 \rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$. D'autre part, $f(w(\alpha)) = w(f(\alpha))$ et, puisque $w(v_0) = v_0$, on a $\langle f(w(\alpha)), v_0 \rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$. Cela montre que $\langle w(\alpha), v_0 \rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$ et donc que $w(\alpha) \in \Phi_s^+$. En d'autres termes, $w \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$.

(c) D'après (b), le groupe $W_{\mathbf{L}}(s)^H$ normalise $W^\circ(s)^H$. et $W_{\mathbf{L}}(s)^H \cap W^\circ(s)^H = 1$. D'autre part W^H normalise $W_{\mathbf{L}}$, donc $W(s)^H$ normalise $W_{\mathbf{L}}(s)^H$. D'où (c). ■

8.D. Éléments semi-simples cuspidaux. Un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^*$ (respectivement $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$) est dit *géométriquement cuspidal* (respectivement *rationnellement cuspidal*) s'il existe un élément $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ (respectivement $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$) tel que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$. S'il est nécessaire de préciser le groupe ambiant, nous parlerons d'éléments géométriquement ou rationnellement \mathbf{G}^* -cuspidaux. La définition précédente est la même que [Bon5, définition 1.4.1]. Nous commençons cette sous-section par une caractérisation des éléments semi-simples géométriquement cuspidaux.

Proposition 8.8. *Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ si et seulement si $a \notin A_{\mathbf{L}^*}(s)$ pour tout sous-groupe de Levi propre \mathbf{L}^* de \mathbf{G}^* contenant s (où on rappelle que $A_{\mathbf{L}^*}(s)$ peut être vu naturellement comme un sous-groupe de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$).*

DÉMONSTRATION - S'il existe un sous-groupe de Levi propre \mathbf{L}^* de \mathbf{G}^* contenant s tel que $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)$, il résulte de la commutativité du diagramme 8.5 que $\omega_s(a)$ n'appartient pas à $\mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$.

Réciproquement, supposons que $a \notin A_{\mathbf{L}^*}(s)$ pour tout sous-groupe de Levi propre \mathbf{L}^* de \mathbf{G}^* contenant s . Nous devons montrer que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$. Pour cela, compte tenu de [Bon5, 1.4.6 et 1.4.7], nous

pouvons supposer que \mathbf{G} est semi-simple, simplement connexe et quasi-simple. D'après [Bon8, proposition 3.14 (b)], a peut-être vu comme un automorphisme du diagramme de Dynkin affine de \mathbf{G} . L'hypothèse implique que a agit transitivement sur le diagramme de Dynkin affine (sinon a appartient à un sous-groupe parabolique propre de W). Un examen de la classification des systèmes de racines montre que cela ne peut arriver que lorsque \mathbf{G} est de type A_n . Dans ce cas, a est d'ordre $n + 1$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ est aussi d'ordre $n + 1$. Par conséquent, $\omega_s(a)$ est injectif et le résultat est immédiat. ■

Nous rappelons certaines des propriétés des éléments semi-simples cuspidaux démontrées dans [Bon5, §1.4]. Rappelons que s est dit *isolé* (respectivement *quasi-isolé*) si $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ (respectivement $C_{\mathbf{G}^*}(s)$) n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi propre de \mathbf{G}^* .

Proposition 8.9. *Soit s un élément semi-simple géométriquement cuspidal de \mathbf{G}^* . Alors :*

- (a) *Toutes les composantes quasi-simples de \mathbf{G}^* sont de type A .*
- (b) *Si \mathbf{L}^* est un sous-groupe de Levi propre de \mathbf{G}^* contenant s , alors le morphisme injectif $A_{\mathbf{L}^*}(s) \hookrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)$ n'est pas surjectif.*
- (c) *Si $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ est de plus rationnellement cuspidal, alors si \mathbf{L}^* est un sous-groupe de Levi F^* -stable propre de \mathbf{G}^* contenant s , alors le morphisme injectif $A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*} \hookrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ n'est pas surjectif.*
- (d) *s est quasi-isolé et régulier.*
- (e) *L'application $\omega_s : A_{\mathbf{G}^*}(s) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION - (a) découle de la proposition 7.1 (c). (b) découle de la commutativité du diagramme 8.5. (c) découle de la proposition 8.8. Le fait que s est quasi-isolé découle de (b). La preuve de la régularité de s est faite dans [Bon4, lemme 3.2.9]. D'où (d). Pour (e), voir [Bon5, proposition 1.4.9]. ■

Fixons maintenant $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ et posons

$$\mathbf{L}_{s,a}^* = C_{\mathbf{G}^*}^\circ(((\mathbf{T}_1^*)^a)^\circ).$$

C'est un sous-groupe de Levi de \mathbf{G}^* contenant \mathbf{T}_1^* . Soit $\mathbf{L}_{s,a}$ un sous-groupe de Levi de \mathbf{G} dual de $\mathbf{L}_{s,a}^*$. Notons que $a \in A_{\mathbf{L}_{s,a}^*}(s)$.

Proposition 8.10. *Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$, alors $\omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{L}_{s,a})$. Donc s est géométriquement cuspidal dans $\mathbf{L}_{s,a}^*$.*

DÉMONSTRATION - Pour montrer la proposition 8.10, on peut travailler dans $\mathbf{L}_{s,a}$, c'est-à-dire que l'on peut supposer que $\mathbf{L}_{s,a} = \mathbf{G}$. L'hypothèse signifie donc que $((\mathbf{T}_1^*)^a)^\circ = \mathbf{Z}(\mathbf{G}^*)^\circ$, c'est-à-dire que a est un élément cuspidal [GP, définition 3.1.1] de W . Par suite, si \mathbf{M} est un sous-groupe de Levi propre de \mathbf{G} contenant \mathbf{T}_1 et si \mathbf{M}^* est un sous-groupe de Levi de \mathbf{G}^* contenant \mathbf{T}_1^* dual de \mathbf{M} , alors $a \notin W_{\mathbf{M}}(s)$. La proposition 8.8 montre alors que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$. ■

Corollaire 8.11. *Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors :*

- (a) $C_{\mathbf{L}_{s,a}^*}^\circ(s) = \mathbf{T}_1^*$, c'est-à-dire $W_{\mathbf{L}_{s,a}^*}^\circ(s) = 1$.
- (b) $W_{\mathbf{L}_{s,a}}(s)^a \subset A_{\mathbf{G}^*}(s)$.
- (c) $W_{\mathbf{L}_{s,a}}(s)^a$ commute avec $W^\circ(s)^a$.
- (d) $N_W(W_{\mathbf{L}_{s,a}}) = W^a \cdot W_{\mathbf{L}_{s,a}}$.
- (e) $N_{W(s)}(W_{\mathbf{L}_{s,a}}) = W(s)^a$.

DÉMONSTRATION - Le groupe $\langle a \rangle$ stabilise Φ_s^+ . Par conséquent, (a), (b) et (c) découlent de la proposition 8.7. Montrons (d). Soit $w \in N_W(W_{\mathbf{L}_{s,a}})$. Par construction, a est un élément cuspidal [GP, définition 3.1.1] de $W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. Par suite, $waw^{-1} \in W_{\mathbf{L}_{s,a}}$ et est conjugué à a sous W . Donc, d'après [GP, théorème 3.2.11], il existe $x \in W_{\mathbf{L}_{s,a}}$ tel que $waw^{-1} = xax^{-1}$. Donc $w \in W^a \cdot W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. Cela montre que $N_W(W_{\mathbf{L}_{s,a}}) \subset W^a \cdot W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. L'inclusion réciproque est immédiate.

Montrons pour finir (e). Soit $w \in W(s)$ normalisant $W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. Quitte à multiplier w par un élément de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ (et en utilisant (d)), on peut supposer que $w \in W^\circ(s)$. D'après (d), on a $awa^{-1}w^{-1} \in W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. Mais, d'autre part, $awa^{-1}w^{-1} \in W^\circ(s)$. Donc, d'après (a), $awa^{-1}w^{-1} = 1$. ■

REMARQUE - À ce jour, la preuve de [GP, théorème 3.2.11] nécessite la classification des groupes de Coxeter finis et de leurs classes cuspidales, ce qui est désagréable. Il faut noter que l'analogie de [GP, théorème 3.2.11] est faux en général pour les groupes de réflexions complexes. \square

Chapitre III. Induction et restriction de Lusztig, séries de Lusztig

Nous rappelons ici la construction de l'induction et de la restriction de Lusztig ainsi que la définition de séries de Lusztig géométriques et rationnelles. Un des buts de ce chapitre est de fournir une preuve complète de la disjonction des séries de Lusztig rationnelles (en partant de la disjonction des séries géométriques des groupes à centre connexe). Cette preuve est largement esquissée dans [Lu3] et [DiMi2, chapitre 14] mais dans ces deux cas, elle n'est pas tout-à-fait complète. Dans la section 9 nous rappelons quelques propriétés de la dualité entre caractères linéaires d'un tore et éléments semi-simples du dual. Nous reprenons notamment un lemme d'Asai [As, théorème 2.1.1] sur les caractères centraux associés à des éléments semi-simples géométriquement mais non rationnellement conjugués. Dans la section 10, nous étudions les actions du centre sur les applications de Lusztig. Nous rappelons aussi dans quels cas la formule de Mackey est connue. La section 11 est consacrée à la disjonction des séries de Lusztig ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés (caractère central, compatibilité à l'induction de Lusztig...).

9. CARACTÈRES LINÉAIRES DE TORES MAXIMAUX

9.A. Dualité. Soit $\nabla(\mathbf{G}, F)$ l'ensemble des couples (\mathbf{T}, θ) où \mathbf{T} est un tore maximal F -stable de \mathbf{G} et $\theta : \mathbf{T}^F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est un caractère linéaire. Soit $\nabla^*(\mathbf{G}, F)$ l'ensemble des couples (\mathbf{T}^*, s) où \mathbf{T}^* est un tore maximal F^* -stable de \mathbf{G}^* et $s \in \mathbf{T}^{*F^*}$. Le choix des morphismes ι et j définis dans §1.B induit une bijection [DiMi2, proposition 13.13]

$$(9.1) \quad \nabla(\mathbf{G}, F)/\mathbf{G}^F \longrightarrow \nabla^*(\mathbf{G}, F)/\mathbf{G}^{*F^*}.$$

Si $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F)$ et $(\mathbf{T}^*, s) \in \nabla^*(\mathbf{G}, F)$, nous écrivons $(\mathbf{T}, \theta) \xleftrightarrow{\mathbf{G}} (\mathbf{T}^*, s)$ pour dire que (\mathbf{T}, θ) et (\mathbf{T}^*, s) sont associés par la bijection 9.1.

Lemme 9.2. Soient $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \in \nabla(\tilde{\mathbf{G}}, F)$, $(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s}) \in \nabla^*(\tilde{\mathbf{G}}, F)$ et $z \in (\text{Ker } i^*)^{F^*}$. Voyons $\hat{z}^{\tilde{\mathbf{G}}}$ comme un caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{T}}^F$ par restriction depuis $\tilde{\mathbf{G}}^F$. Alors $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \xleftrightarrow{\mathbf{G}} (\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s})$ si et seulement si $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta} \hat{z}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \xleftrightarrow{\mathbf{G}} (\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s}z)$.

DÉMONSTRATION - Claire. ■

9.B. Restriction. Si $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \in \nabla(\tilde{\mathbf{G}}, F)$, nous posons

$$\mathfrak{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) = (\tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}, \text{Res}_{\tilde{\mathbf{T}}^F \cap \mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{T}}^F} \tilde{\theta}) \in \nabla(\mathbf{G}, F).$$

De même, si $(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s}) \in \nabla^*(\tilde{\mathbf{G}}, F)$, nous posons

$$*\mathfrak{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s}) = (i^*(\tilde{\mathbf{T}}^*), i^*(\tilde{s})) \in \nabla^*(\mathbf{G}, F).$$

Le lemme suivant se démontre en revenant à la définition de la dualité entre les tores.

Lemme 9.3.

- (a) Soient $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta})$ et $(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s})$ deux éléments de $\nabla(\tilde{\mathbf{G}}, F)$ et $\nabla^*(\tilde{\mathbf{G}}, F)$ respectivement. On suppose que $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \xleftrightarrow{\mathbf{G}} (\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s})$. Alors $\mathfrak{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \xleftrightarrow{\mathbf{G}} *\mathfrak{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s})$.
- (b) Soient (\mathbf{T}, θ) et (\mathbf{T}^*, s) deux éléments de $\nabla(\mathbf{G}, F)$ et $\nabla^*(\mathbf{G}, F)$ respectivement. On suppose que $(\mathbf{T}, \theta) \xleftrightarrow{\mathbf{G}} (\mathbf{T}^*, s)$. On pose

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{T}}^* = i^{*-1}(\mathbf{T}^*)$$

et soit \tilde{s} un élément semi-simple de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\tilde{s}) = s$ (Un tel élément \tilde{s} existe d'après le corollaire 2.7). Alors il existe une extension $\tilde{\theta}$ de θ à $\tilde{\mathbf{T}}^F$ telle que $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \xleftrightarrow{\mathbf{G}} (\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s})$.

9.C. Conjugaison géométrique et rationnelle. La définition suivante a été posée par Deligne et Lusztig [DeLu1, définition 5.5].

Définition 9.4. Soient (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) deux éléments de $\nabla(\mathbf{G}, F)$ et soient (\mathbf{T}_1^*, s_1) et (\mathbf{T}_2^*, s_2) deux éléments de $\nabla^*(\mathbf{G}, F)$ tels que $(\mathbf{T}_k, \theta_k) \xleftrightarrow{\mathbf{G}} (\mathbf{T}_k^*, s_k)$ pour tout $k \in \{1, 2\}$. On dit que (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) sont **géométriquement conjugués** (respectivement **sont dans la même série rationnelle**) si s_1 et

s_2 sont géométriquement conjugués (respectivement rationnellement conjugués), c'est-à-dire si ils sont conjugués dans \mathbf{G}^* (respectivement \mathbf{G}^{*F^*}).

Soit s un élément semi-simple de \mathbf{G}^{*F^*} . Nous noterons (s) , ou $(s)_{\mathbf{G}^*}$ s'il y a ambiguïté, la classe de conjugaison géométrique de s . De même, nous noterons $[s]$, ou $[s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}$, la classe de conjugaison rationnelle de s . Soit $\nabla^*(\mathbf{G}, F, (s))$ (respectivement $\nabla^*(\mathbf{G}, F, [s])$) l'ensemble des couples $(\mathbf{T}^*, s') \in \nabla^*(\mathbf{G}, F)$ tels que s' est géométriquement (respectivement rationnellement) conjugué à s . Par dualité, nous notons $\nabla(\mathbf{G}, F, (s))$ (respectivement $\nabla(\mathbf{G}, F, [s])$) l'ensemble des couples $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F)$ associés aux couples appartenant à $\nabla^*(\mathbf{G}, F, (s))$ (respectivement $\nabla^*(\mathbf{G}, F, [s])$) par la bijection 9.1.

Corollaire 9.5. *Soit $\tilde{s} \in \tilde{\mathbf{G}}^{F^*}$ un élément semi-simple et soit $s = i^*(\tilde{s})$. Si $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \in \nabla(\tilde{\mathbf{G}}, F, (\tilde{s}))$, alors $\text{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s])$.*

9.D. Autres caractérisations des séries géométriques et rationnelles. Concernant la conjugaison géométrique des couples appartenant à $\nabla(\mathbf{G}, F)$, le lemme suivant nous fournit une définition équivalente [DeLu1, proposition 5.4] :

Lemme 9.6 (Deligne-Lusztig). *Soient (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) deux éléments de $\nabla(\mathbf{G}, F)$. Alors (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) sont géométriquement conjugués si et seulement si il existe un entier naturel non nul n et un élément $g \in \mathbf{G}^{F^n}$ tel que $\mathbf{T}_2 = {}^g\mathbf{T}_1$ et*

$$\theta_2 \circ N_{F^n/F} = {}^g(\theta_1 \circ N_{F^n/F})$$

où $N_{F^n/F} : \mathbf{T}_k^{F^n} \rightarrow \mathbf{T}_k^F$, $t \mapsto tF(t) \dots F^{n-1}(t)$ est la norme de F^n à F ($k = 1$ où 2).

Nous allons maintenant utiliser le groupe $\tilde{\mathbf{G}}$ (et le fait que son centre est connexe) pour donner une autre définition des séries rationnelles. Tout d'abord, notons que les séries géométriques et rationnelles coïncident dans $\tilde{\mathbf{G}}$ à cause du théorème de Steinberg (voir théorème 3.5) :

Proposition 9.7. *Deux éléments semi-simples de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ sont géométriquement conjugués si et seulement si ils sont rationnellement conjugués.*

Corollaire 9.8. *Soient $(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1)$ et $(\tilde{\mathbf{T}}_2, \tilde{\theta}_2)$ deux éléments de $\nabla(\tilde{\mathbf{G}}, F)$. Alors $(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1)$ et $(\tilde{\mathbf{T}}_2, \tilde{\theta}_2)$ sont géométriquement conjugués si et seulement si ils appartiennent à la même série rationnelle.*

La prochaine proposition fournit, en termes du groupe $\tilde{\mathbf{G}}$, un outil pratique pour déterminer si deux éléments semi-simples de \mathbf{G}^{*F^*} sont rationnellement conjugués.

Proposition 9.9. *Soient s_1 et s_2 deux éléments semi-simples de \mathbf{G}^{*F^*} . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) s_1 et s_2 sont rationnellement conjugués ;
- (2) Il existe des éléments semi-simples rationnellement conjugués \tilde{s}_1 et \tilde{s}_2 dans $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tels que $i^*(\tilde{s}_i) = s_i$ pour tout $i \in \{1, 2\}$;
- (3) Il existe des éléments semi-simples géométriquement conjugués \tilde{s}_1 et \tilde{s}_2 dans $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tels que $i^*(\tilde{s}_i) = s_i$ pour tout $i \in \{1, 2\}$.

DÉMONSTRATION - D'après la proposition 9.7, (2) et (3) sont équivalents. Il est par ailleurs clair que (2) implique (1). Il nous reste donc à démontrer que (1) implique (2).

Supposons donc qu'il existe $g \in \mathbf{G}^{*F^*}$ tel que $s_2 = gs_1g^{-1}$. Puisque $i^* : \tilde{\mathbf{G}}^{*F^*} \rightarrow \mathbf{G}^{*F^*}$ est surjective (voir corollaire 2.7), il existe $\tilde{s}_1 \in \tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ et $\tilde{g} \in \tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tels que $i^*(\tilde{s}_1) = s_1$ et $i^*(\tilde{g}) = g$. Posons maintenant $\tilde{s}_2 = \tilde{g}\tilde{s}_1\tilde{g}^{-1}$. Alors \tilde{s}_1 et \tilde{s}_2 sont des éléments semi-simples rationnellement conjugués de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ et $i^*(\tilde{s}_k) = s_k$ pour tout $k \in \{1, 2\}$. ■

Corollaire 9.10. *Soient (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) deux éléments de $\nabla(\mathbf{G}, F)$. Soit $\tilde{\mathbf{T}}_k = \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$ (pour $k \in \{1, 2\}$). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) appartiennent à la même série rationnelle ;
- (2) Il existe des extensions $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$ de θ_1 et θ_2 respectivement (à $\tilde{\mathbf{T}}_1^F$ et $\tilde{\mathbf{T}}_2^F$ respectivement) telles que $(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1)$ et $(\tilde{\mathbf{T}}_2, \tilde{\theta}_2)$ sont géométriquement conjugués.

DÉMONSTRATION - Cela résulte immédiatement de la proposition 9.9 et du lemme 9.3 (b). ■

9.E. Caractères centraux. La proposition suivante explique comment varient les caractères linéaires $\text{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}^{\mathbf{T}^F} \theta$ lorsque (\mathbf{T}, θ) parcourt une série géométrique ou rationnelle.

Proposition 9.11. *Soient (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) deux éléments de $\nabla(\mathbf{G}, F)$.*

(a) *Si (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) sont géométriquement conjugués, alors*

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}}^{\mathbf{T}_1^F} \theta_1 = \text{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}}^{\mathbf{T}_2^F} \theta_2.$$

(b) *Si (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) appartiennent à la même série rationnelle, alors*

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}^{\mathbf{T}_1^F} \theta_1 = \text{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}^{\mathbf{T}_2^F} \theta_2.$$

DÉMONSTRATION - (a) Si (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) sont géométriquement conjugués, alors, d'après le lemme 9.6, il existe un entier naturel non nul n et un élément $g \in \mathbf{G}^{F^n}$ tel que $\mathbf{T}_2 = {}^g \mathbf{T}_1$ et

$$\theta_2 \circ N_{F^n/F} = {}^g(\theta_1 \circ N_{F^n/F}).$$

Soit $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}$. Puisque le groupe $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ}$ est connexe, il existe $z' \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F^n}$ tel que $N_{F^n/F}(z') = z$. Donc

$$\theta_2(z) = \theta_2(N_{F^n/F}(z')) = \theta_1(N_{F^n/F}(g^{-1}z'g)) = \theta_1(N_{F^n/F}(z')) = \theta_1(z)$$

car z' est central. Cela montre (a).

(b) Si (\mathbf{T}_1, θ_1) et (\mathbf{T}_2, θ_2) appartiennent à la même série rationnelle, alors, d'après le corollaire 9.10, il existe $(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1)$ et $(\tilde{\mathbf{T}}_2, \tilde{\theta}_2)$ dans $\nabla(\tilde{\mathbf{G}}, F)$ tels que

$$\Re s_{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\mathbf{T}}_k, \tilde{\theta}_k) = (\mathbf{T}_k, \theta_k)$$

($k \in \{1, 2\}$) et tels que $(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1)$ et $(\tilde{\mathbf{T}}_2, \tilde{\theta}_2)$ sont géométriquement conjugués. Par conséquent, d'après (a) (appliqué au groupe $\tilde{\mathbf{G}}$) et puisque $\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$ est connexe, on a

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F}^{\tilde{\mathbf{T}}_1^F} \tilde{\theta}_1 = \text{Res}_{\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F}^{\tilde{\mathbf{T}}_2^F} \tilde{\theta}_2.$$

Donc (b) découle de ce que $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}}) \cap \mathbf{G}$. ■

Si s est un élément semi-simple de \mathbf{G}^{*F^*} , nous notons $\hat{s} : \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}^{\times}$ le caractère linéaire défini par

$$(9.12) \quad \hat{s} = \text{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}^{\mathbf{T}^F} \theta$$

pour tout $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s])$; \hat{s} est bien défini d'après la proposition 9.11 (b). Nous notons d'autre part \hat{s}° la restriction de \hat{s} à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}$; le caractère linéaire \hat{s}° peut aussi être défini par l'égalité

$$(9.13) \quad \hat{s}^{\circ} = \text{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}}^{\mathbf{T}^F} \theta$$

pour tout $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, (s))$ (voir proposition 9.11 (a)).

Soit maintenant $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Si $g_{\alpha} \in \mathbf{G}^*$ est tel que $g_{\alpha}^{-1}F(g_{\alpha}) \in C_{\mathbf{G}^*}(s)$ et représente α , alors $s_{\alpha} = g_{\alpha} s g_{\alpha}^{-1} \in \mathbf{G}^{*F^*}$ est géométriquement conjugué à s et $[s_{\alpha}]$ ne dépend que de α et non pas du choix de g_{α} . De plus, $(s_{\alpha})_{\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))}$ est une famille de représentants des classes de \mathbf{G}^{*F^*} -conjugaison contenues dans $(s)_{\mathbf{G}^*}^{F^*}$. D'autre part, d'après la proposition 9.11 (a), $\hat{s}_{\alpha} \hat{s}^{-1}$ est un caractère linéaire du groupe $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$. Il est donné par la formule suivante :

Lemme 9.14 (Asai). *Si $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, alors $\hat{s}_{\alpha} \hat{s}^{-1} = \omega_s^1(\alpha)$.*

RAPPEL - Le morphisme $\omega_s^1 : H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s)) \rightarrow (\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F)^{\wedge}$ a été défini en §8.A. □

DÉMONSTRATION - Le lemme 9.14 est démontré dans [As, théorème 2.1.1] lorsque F agit trivialement sur le groupe $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ (et lorsque F est un endomorphisme de Frobenius). L'essentiel de sa preuve s'applique ici encore mais nous préférons la rappeler dans ce cadre légèrement plus général.

Soit $\tilde{\mathbf{T}}^*$ un tore maximal F^* -stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ contenant \tilde{s} et soit $\tilde{\mathbf{T}}$ un tore maximal F -stable de $\tilde{\mathbf{G}}$ dual de $\tilde{\mathbf{T}}^*$. Posons $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{T}^* = i^*(\tilde{\mathbf{T}}^*)$. Soit $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ et soit a un élément de $C_{\mathbf{G}^*}(s)$

representant α . On peut supposer que a normalise \mathbf{T}^* et que $g_\alpha^{-1}F(g_\alpha) = a$. Alors s_α peut être vu comme un élément de \mathbf{T}^* : plus précisément, $s_\alpha \in \mathbf{T}^{*aF^*}$.

Choisissons un entier naturel non nul n tel que F^n soit un endomorphisme déployé de $\tilde{\mathbf{T}}$ sur un corps fini à q éléments et tel que $(aF^*)^n = F^{*n}$ sur $\tilde{\mathbf{T}}^*$. On note encore par a l'élément de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ correspondant à $a \in N_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{T}^*)$.

Il existe $\tilde{x} \in Y(\tilde{\mathbf{T}}^*) = X(\tilde{\mathbf{T}})$ tel que

$$\tilde{s} = N_{F^n/F}(\tilde{x})(\tilde{i}(\frac{1}{q-1})).$$

On pose $x = \text{Res}_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\tilde{\mathbf{T}}} \tilde{x}$. Alors

$$s = N_{F^n/F}(x)(\tilde{i}(\frac{1}{q-1})).$$

D'autre part, il existe $x_\alpha \in Y(\mathbf{T}^*) = X(\mathbf{T})$ tel que

$$s = N_{F^n/aF}(x_\alpha)(\tilde{i}(\frac{1}{q-1})).$$

Alors $\hat{s} = \text{Res}_{\mathbf{Z}_F}^{\mathbf{T}} x$ et $\hat{s}_\alpha = \text{Res}_{\mathbf{Z}_F}^{\mathbf{T}} x_\alpha$.

Soit $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$. Alors il existe $t \in \mathbf{T}$ tel que $t^{-1}F^n(t) = z$. On pose $u = F(t)$. Puisque $F(z) = z$ on a $u^{-1}F^n(u) = z$. Soit $t_1 = t^{-1}F(t)$ et $t_\alpha = t^{-1}aF(t)$. Alors $N_{F^n/F}(t_1) = N_{F^n/aF}(t_\alpha) = z$ et $t_1 \in \mathbf{T}^{F^n}$ et $t_\alpha \in \mathbf{T}^{(aF)^n} = \mathbf{T}^{F^n}$. En particulier,

$$\hat{s}(z) = N_{F^n/F}(x)(t_1) \quad \text{et} \quad \hat{s}_\alpha(z) = N_{F^n/F}(x_\alpha)(t_\alpha).$$

Mais,

$$N_{F^n/F}(x)(\tilde{i}(\frac{1}{q-1})) = N_{F^n/aF}(x_\alpha)(\tilde{i}(\frac{1}{q-1}))$$

donc

$$\text{Res}_{\mathbf{T}^{F^n}}^{\mathbf{T}} N_{F^n/F}(x) = \text{Res}_{\mathbf{T}^{F^n}}^{\mathbf{T}} N_{F^n/aF}(x_\alpha).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \hat{s}_\alpha(z)\hat{s}(z)^{-1} &= N_{F^n/F}(x)(t_\alpha t_1^{-1}) \\ &= N_{F^n/F}(x)(a u a^{-1} u^{-1}) \\ &= ({}^a N_{F^n/F}(\tilde{x}) - N_{F^n/F}(\tilde{x}))(u). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\varphi_s(a) = \tilde{a} \tilde{s} \tilde{a}^{-1} \tilde{s}^{-1} = ({}^a N_{F^n/F}(\tilde{x}) - N_{F^n/F}(\tilde{x}))(\tilde{i}(\frac{1}{q-1}))$$

donc, d'après 4.9, on a

$$\begin{aligned} \omega_s^1(\alpha)(z) &= \omega_s^1(\alpha)(u^{-1}F^n(u)) \\ &= ({}^a N_{F^n/F}(\tilde{x}) - N_{F^n/F}(\tilde{x}))(\iota^{-1}(\frac{1}{q^n-1})), \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu. ■

10. INDUCTION ET RESTRICTION DE LUSZTIG

10.A. Définitions. Soit \mathbf{P} un sous-groupe parabolique de \mathbf{G} et supposons que \mathbf{P} possède un complément de Levi F -stable \mathbf{L} . Soit \mathbf{U} le radical unipotent de \mathbf{P} . Posons, suivant Lusztig [Lu1],

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} = \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\}.$$

Alors \mathbf{G}^F agit sur $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$ par translations à gauche tandis que \mathbf{L}^F agit par translations à droite. Par conséquent,

$$H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

est un \mathbf{G}^F -module- \mathbf{L}^F virtuel et

$$H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}})^\vee = \sum_{k \geq 0} (-1)^k H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\vee$$

est un \mathbf{L}^F -module- \mathbf{G}^F virtuel. Nous noterons

$$\begin{array}{ccc} R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \mathbb{Z} \text{Irr } \mathbf{L}^F & \longrightarrow & \mathbb{Z} \text{Irr } \mathbf{G}^F \\ \Lambda & \longmapsto & H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \Lambda \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} {}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \mathbb{Z} \text{Irr } \mathbf{G}^F & \longrightarrow & \mathbb{Z} \text{Irr } \mathbf{L}^F \\ \Gamma & \longmapsto & H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{G}^F} \Gamma \end{array}$$

les applications d'induction et de restriction de Lusztig respectivement. Elles s'étendent naturellement par linéarité en applications entre espaces de fonctions centrales

$$R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \text{Cent}(\mathbf{L}^F) \longrightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F)$$

et

$${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \text{Cent}(\mathbf{G}^F) \longrightarrow \text{Cent}(\mathbf{L}^F).$$

Ces deux applications sont adjointes l'une de l'autre par rapport aux produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^F}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{G}^F}$.

D'autre part, nous noterons

$$\begin{array}{ccc} Q_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \mathbf{G}_{\text{uni}}^F \times \mathbf{L}_{\text{uni}}^F & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \\ (u, v) & \longmapsto & \text{Tr}((u, v), H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}})) \end{array}$$

la fonction de Green associée à la donnée $(\mathbf{L}, \mathbf{P}, \mathbf{G})$.

EXEMPLE 10.1 - INDUCTION DE HARISH-CHANDRA - Si \mathbf{P} est F -stable, alors \mathbf{U} agit par translation à droite sur $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$ et $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}/\mathbf{U} \simeq \mathbf{G}^F/\mathbf{U}^F$. Par conséquent,

$$H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 2 \dim \mathbf{U} \\ \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}[\mathbf{G}^F/\mathbf{U}^F] & \text{si } k = 2 \dim \mathbf{U}. \end{cases}$$

Par suite, $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ est le reflet, sur les groupes de Grothendieck, d'un vrai foncteur entre les catégories de modules, foncteur qui sera toujours noté $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$. De même pour ${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$. Ces deux foncteurs sont appelés respectivement *induction* et *restriction de Harish-Chandra*. Pratiquement toutes les formules démontrées dans ce chapitre au sujet des applications de Lusztig ont un sens en termes de modules lorsque l'on est en présence d'induction ou de restriction de Harish-Chandra (voir par exemple 10.4, 10.5, propositions 10.10 et 10.11...). \square

10.B. Actions de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ et $H^1(F, \mathbf{Z}(\mathbf{G}))$. L'action de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ par translation à gauche (ou à droite) sur $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$ commute aux actions de \mathbf{G}^F et \mathbf{L}^F . Par conséquent, si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$, alors on a

$$(10.2) \quad t_z^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ t_z^{\mathbf{L}}$$

et

$$(10.3) \quad t_z^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = {}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ t_z^{\mathbf{G}}.$$

Posons $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$. Soit $a \in H^1(F, \mathbf{Z}(\mathbf{G}))$ et soit $\tilde{a} \in \tilde{\mathbf{L}}^F$ tel que $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(a) = \tilde{a} \mathbf{L}^F \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F$. Alors la conjugaison par \tilde{a} induit un automorphisme de $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$, ce qui implique que

$$(10.4) \quad \tau_a^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ \tau_{h_{\mathbf{L}}^1(a)}^{\mathbf{L}}$$

et

$$(10.5) \quad \tau_{h_{\mathbf{L}}^1(a)}^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = {}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ \tau_a^{\mathbf{G}}.$$

EXEMPLE 10.6 - Soient $\zeta_{\mathbf{L}} \in H^1(F, \mathbf{Z}(\mathbf{G}))^{\wedge}$ et $\zeta \in H^1(F, \mathbf{Z}(\mathbf{G}))^{\wedge}$ et soit $\lambda \in \text{Cent}(\mathbf{L}^F)_{\zeta_{\mathbf{L}}}$ et $\gamma \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F)_{\zeta}$. Alors, d'après 10.4, on a

$$R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \lambda \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F)_{\zeta_{\mathbf{L}} \circ h_{\mathbf{L}}^1}.$$

D'autre part, si $\zeta = \zeta_{\mathbf{L}} \circ h_{\mathbf{L}}^1$, alors, d'après 10.5, on a

$${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \gamma \in \text{Cent}(\mathbf{L}^F)_{\zeta_{\mathbf{L}}}.$$

De même, si $\text{Ker } \zeta \not\subset \text{Ker } h_{\mathbf{L}}$, alors

$${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \gamma = 0. \quad \square$$

10.C. Restriction de $\tilde{\mathbf{G}}$ à \mathbf{G} . Notons $\tilde{\mathbf{P}}$ l'unique sous-groupe parabolique de $\tilde{\mathbf{G}}$ tel que $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{G}$ et soit $\tilde{\mathbf{L}}$ l'unique complément de Levi de $\tilde{\mathbf{P}}$ tel que $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} \cap \mathbf{G}$. Alors $\tilde{\mathbf{L}}$ est F -stable et \mathbf{U} est le radical unipotent de $\tilde{\mathbf{P}}$. De plus,

$$(10.7) \quad \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}} = \tilde{\mathbf{G}}^F \times_{\mathbf{G}^F} \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{L}^F} \tilde{\mathbf{L}}^F.$$

Par suite, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un isomorphisme de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ -modules- \mathbf{L}^F

$$(10.8) \quad H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \tilde{\mathbf{G}}^F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{G}^F} H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}})$$

ainsi qu'un isomorphisme de \mathbf{G}^F -modules- $\tilde{\mathbf{L}}^F$

$$(10.9) \quad H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \tilde{\mathbf{L}}^F.$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 10.10. *On a :*

- (a) $\text{Ind}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \circ R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \circ \text{Ind}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F},$
- (a*) $\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \circ {}^*R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} = {}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F},$
- (b) $\text{Ind}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \circ {}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = {}^*R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \circ \text{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F},$
- (b*) $\text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \circ R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} = R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ \text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F},$
- (c) $Q_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(u, v) = \sum_{g \in [\tilde{\mathbf{G}}^F / \mathbf{G}^F]} Q_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}({}^g u, v) = \sum_{l \in [\tilde{\mathbf{L}}^F / \mathbf{L}^F]} Q_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(u, {}^l v).$

DÉMONSTRATION - Nous démontrerons ici seulement la formule (a), les autres découlant d'arguments similaires. Notons aussi que (a*) et (b*) sont des formules adjointes de (a) et (b). Soit Λ un \mathbf{L}^F -module. Alors, d'après 10.8, on a des isomorphismes de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ -modules

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} (H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \Lambda) &\simeq \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \tilde{\mathbf{G}}^F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{G}^F} (H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \Lambda) \\ &\simeq (\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \tilde{\mathbf{G}}^F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{G}^F} H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}})) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \Lambda \\ &\simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \Lambda \\ &\simeq (H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \tilde{\mathbf{L}}^F} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \tilde{\mathbf{L}}^F) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \Lambda \\ &\simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \tilde{\mathbf{L}}^F} (\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \tilde{\mathbf{L}}^F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \Lambda) \\ &\simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \tilde{\mathbf{L}}^F} \text{Ind}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \Lambda \end{aligned}$$

et (a) en résulte. ■

Nous rappelons aussi la

Proposition 10.11. *Soit $\tau : \tilde{\mathbf{L}}^F / \mathbf{L}^F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}^{\times}$ un caractère linéaire. Alors τ peut être vu comme un caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{G}}^F / \mathbf{G}^F \simeq \tilde{\mathbf{L}}^F / \mathbf{L}^F$ et, en utilisant cette identification, on a*

- (a) *Si $\tilde{\lambda} \in \text{Class}(\tilde{\mathbf{L}}^F)$, alors $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\lambda} \otimes \tau) = R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\lambda}) \otimes \tau.$*
- (b) *Si $\tilde{\gamma} \in \text{Class}(\tilde{\mathbf{G}}^F)$, alors ${}^*R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\gamma} \otimes \tau) = {}^*R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\gamma}) \otimes \tau.$*

10.D. Dualité d'Alvis-Curtis. Notons $\mathcal{P}(\Delta_0)$ l'ensemble des parties de Δ_0 . Alors ϕ_0 agit sur $\mathcal{P}(\Delta_0)$ et on note $\mathcal{P}(\Delta_0)^{\phi_0}$ l'ensemble des parties ϕ_0 -stables de Δ_0 . Avec ces notations, on peut définir

$$D_{\mathbf{G}} = \sum_{I \in \mathcal{P}(\Delta_0)^{\phi_0}} \eta_I R_{\mathbf{L}_I \subset \mathbf{P}_I}^{\mathbf{G}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}_I \subset \mathbf{P}_I}^{\mathbf{G}}.$$

Alors $D_{\mathbf{G}} : \mathbb{Z} \text{Irr } \mathbf{G}^F \rightarrow \mathbb{Z} \text{Irr } \mathbf{G}^F$ est une involution isométrique [DiMi2, proposition 8.10 et corollaire 8.14] appelée *dualité d'Alvis-Curtis*. Elle s'étend en une application linéaire $\text{Cent}(\mathbf{G}^F) \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F)$ toujours noté $D_{\mathbf{G}}$.

10.E. Formule de Mackey. Soient \mathbf{Q} un sous-groupe parabolique de \mathbf{G} et soit \mathbf{M} un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{Q} . Notons $\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})$ l'ensemble des $g \in \mathbf{G}$ tels que $\mathbf{L} \cap {}^g \mathbf{M}$ contient un tore maximal de \mathbf{G} . Nous noterons $\Delta_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}, \mathbf{M} \subset \mathbf{Q}}^{\mathbf{G}}$ l'application linéaire $\text{Cent}(\mathbf{M}^F) \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{L}^F)$ définie par

$$\Delta_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}, \mathbf{M} \subset \mathbf{Q}}^{\mathbf{G}} = {}^* R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M} \subset \mathbf{Q}}^{\mathbf{G}} - \sum_{g \in [\mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F]} R_{\mathbf{L} \cap {}^g \mathbf{M} \subset \mathbf{L} \cap {}^g \mathbf{Q}}^{\mathbf{L}} \circ {}^* R_{\mathbf{L} \cap {}^g \mathbf{M} \subset \mathbf{P} \cap {}^g \mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \circ (\text{ad } g)_{\mathbf{M}^F}.$$

Ici, $(\text{ad } g)_{\mathbf{M}^F} : \text{Cent}(\mathbf{M}^F) \rightarrow \text{Cent}({}^g \mathbf{M}^F)$ est l'application induite par la conjugaison par g . Nous dirons que “la formule de Mackey a lieu dans \mathbf{G} ” si, pour tout sous-groupe réductif connexe \mathbf{G}' de \mathbf{G} de même rang, pour tous sous-groupes paraboliques \mathbf{P}' et \mathbf{Q}' de \mathbf{G}' et pour tous compléments de Levi F -stable \mathbf{L}' et \mathbf{M}' de \mathbf{P}' et \mathbf{Q}' respectivement, on a $\Delta_{\mathbf{L}' \subset \mathbf{P}', \mathbf{M}' \subset \mathbf{Q}'}^{\mathbf{G}'} = 0$. Il est conjecturé que la formule de Mackey est valide sans hypothèse. Pour l'instant, elle n'est connue que dans les cas suivants :

Théorème 10.12 (Formule de Mackey).

- (a) *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite.*
 - (a1) \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont F -stables.
 - (a2) \mathbf{L} ou \mathbf{M} est un tore maximal de \mathbf{G} .*Alors $\Delta_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}, \mathbf{M} \subset \mathbf{Q}}^{\mathbf{G}} = 0$.*
- (b) *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite.*
 - (b1) $\delta = 1$ et $q \neq 2$.
 - (b2) $\delta = 1$ et \mathbf{G} ne contient pas de composante quasi-simple de type E_6 , E_7 ou E_8 .
 - (b3) $\delta = 2$ et \mathbf{G} est de type B_2 , G_2 ou F_4 .*Alors la formule de Mackey a lieu dans \mathbf{G} .*

DÉMONSTRATION - (a1) est dû à Deligne [LuSpa, théorème 2.5], (a2) est dû à Deligne et Lusztig [DeLu2, théorème 7] et (b3) et (b4) et (b5) sont montrés dans [BoMi]. ■

De même que pour le théorème 10.12, il est conjecturé que le corollaire suivant reste vrai sans hypothèse.

Corollaire 10.13. *Soit \mathbf{P}_0 un sous-groupe parabolique de \mathbf{G} dont \mathbf{L} est un complément de Levi. Supposons l'une des conditions suivantes vérifiées :*

- (1) \mathbf{L} est un tore maximal de \mathbf{G} .
- (2) \mathbf{P} et \mathbf{P}_0 sont F -stables.
- (3) $\delta = 1$ et $q \neq 2$.
- (4) $\delta = 1$ et \mathbf{G} ne contient pas de composante quasi-simple de type E_6 , E_7 ou E_8 .
- (5) $\delta = 2$ et \mathbf{G} est de type B_2 , G_2 ou F_4 .

Alors

$$R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}_0}^{\mathbf{G}},$$

$$D_{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{L}} R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ D_{\mathbf{L}}$$

et

$$D_{\mathbf{L}} \circ {}^* R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{L}} {}^* R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ D_{\mathbf{G}}.$$

NOTATION - Si λ est un caractère virtuel de \mathbf{L}^F , nous noterons $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ le groupe $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) / \mathbf{L}^F$ et $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$ l'ensemble des caractères irréductibles de \mathbf{G}^F apparaissant dans le caractère virtuel $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \lambda$. A priori, cet ensemble pourrait dépendre du choix de \mathbf{P} . Bien sûr, il n'en dépend pas si l'une des hypothèses du corollaire 10.13 est satisfaite. Dans la suite, nous n'emploierons cette notation que lorsque cet ensemble ne dépend pas du choix de \mathbf{P} ou bien lorsque le choix du sous-groupe parabolique sera éclairé par le contexte. □

REMARQUE - Si \mathbf{T} est un tore maximal F -stable de \mathbf{G} et si \mathbf{B} est un sous-groupe de Borel contenant \mathbf{T} , nous noterons $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^* R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ les applications $R_{\mathbf{T} \subset \mathbf{B}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^* R_{\mathbf{T} \subset \mathbf{B}}^{\mathbf{G}}$. De même, nous noterons $Q_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ la fonction de Green $Q_{\mathbf{T} \subset \mathbf{B}}^{\mathbf{G}}$ respectivement. □

10.F. Fonctions absolument cuspidales. Une fonction centrale $\gamma : \mathbf{G}^F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est dite *absolument cuspidale* si, pour tout sous-groupe de Levi F -stable propre de \mathbf{G} et pour tout sous-groupe parabolique \mathbf{P} de \mathbf{G} dont \mathbf{L} est un complément de Levi, on a ${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \gamma = 0$ (voir [Bon4, définition du §3.1] ou [Bon5, §4.2]). Nous noterons $\text{Cus}(\mathbf{G}^F)$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel des fonctions absolument cuspidales sur \mathbf{G}^F . D'après 10.2 et 10.4, $\text{Cus}(\mathbf{G}^F)$ est stable sous les actions des groupes $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ et $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Si la formule de Mackey a lieu dans \mathbf{G} , alors

$$(10.14) \quad \text{Cent}(\mathbf{G}^F) = \bigoplus_{\mathbf{L} \in [\mathcal{L}(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^F / \mathbf{G}^F]} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \text{Cus}(\mathbf{L}^F).$$

Rappelons que $\mathcal{L}(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi de \mathbf{G} (voir §7.B) ; $\mathcal{L}(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^F$ est alors l'ensemble des sous-groupes de Levi F -stables de \mathbf{G} , sur lequel le groupe \mathbf{G}^F agit par conjugaison. Remarquons que, d'après 10.4, l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ sur $\text{Cent}(\mathbf{G}^F)$ stabilise $\text{Cus}(\mathbf{G}^F)$.

EXEMPLE 10.15 - Soit $\zeta \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ et supposons que ζ est F -stale. Soit $\gamma \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F)_\zeta$. Alors, d'après l'exemple 10.6, γ est absolument cuspidale. \square

11. SÉRIES DE LUSZTIG GÉOMÉTRIQUES ET RATIONNELLES

11.A. Définitions. Si $(\mathbf{T}, \theta) \xleftarrow{\mathbf{G}} (\mathbf{T}^*, s)$, nous noterons $R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s)$ le caractère (virtuel) de Deligne-Lusztig $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$. Fixons un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F*}$. Nous appellerons *série de Lusztig géométrique* (respectivement *rationnelle*) associée à s et nous noterons $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ (respectivement $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$) l'ensemble des caractères irréductibles de \mathbf{G}^F apparaissant dans un $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$, où $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, (s))$ (respectivement $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s])$). En d'autres termes,

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)) = \bigcup_{(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, (s))} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{T}, \theta)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) = \bigcup_{(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s])} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{T}, \theta).$$

REMARQUES 11.1 - (a) Il est clair que $\nabla(\mathbf{G}, F, (s)) = \bigcup_{[t] \subset (s)} \nabla(\mathbf{G}, F, [t])$, donc

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)) = \bigcup_{[t] \subset (s)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [t]).$$

(b) Si \tilde{s} est un élément semi-simple de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F*}$, alors, d'après le corollaire 9.8, on a $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, (\tilde{s})) = \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$.

(c) Les séries de Lusztig géométriques ou rationnelles sont stables sous l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. En effet, si $a \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et si $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F)$, alors $\tau_a^{\mathbf{G}}(R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)) = R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ d'après la formule 10.4.

(d) Si $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ (respectivement $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$) et si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}$ (respectivement $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$), alors

$$t_z^{\mathbf{G}} \gamma = \hat{s}^\circ(z) \gamma$$

(respectivement $t_z^{\mathbf{G}} \gamma = \hat{s}(z) \gamma$).

En effet, soit $\gamma \in \text{Irr } \mathbf{G}^F$ et notons λ le caractère linéaire de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ tel que $t_z^{\mathbf{G}} \gamma = \lambda(z) \gamma$ pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$. D'après les formules 10.2 et 9.12, on a $t_z^{\mathbf{G}} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta) = \hat{s}(z) R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ pour tout $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s])$. Donc, si $\lambda \neq \hat{s}$, γ et $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ sont orthogonaux. \square

11.B. Partition en séries géométriques. La preuve du théorème suivant est due à Deligne et Lusztig [DeLu1, théorème 6.2].

Théorème 11.2 (Deligne-Lusztig).

- (a) Soit s un élément semi-simple de \mathbf{G}^{*F*} , soit $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, (s))$, soit \mathbf{U} le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de \mathbf{G} contenant \mathbf{T} et soit k un entier naturel. Alors toute composante irréductible de $H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell, \mathbf{T}^F} \theta$ appartient à la série de Lusztig géométrique $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$.

(b) On a

$$\text{Irr } \mathbf{G}^F = \coprod_{(s)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)),$$

où (s) parcourt l'ensemble des classes de conjugaison géométriques d'éléments semi-simples de \mathbf{G}^{*F*} .

Le théorème 11.2 combiné au corollaire 9.8 fournit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 11.3. $\text{Irr } \tilde{\mathbf{G}}^F = \coprod_{[\tilde{s}]} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [\tilde{s}])$.

Si s est un élément semi-simple de \mathbf{G}^{*F*} , nous noterons $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s))$ le sous- $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de $\text{Cent}(\mathbf{G}^F)$ engendré par $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$. Le théorème 11.2 (b) montre que

$$(11.4) \quad \text{Cent}(\mathbf{G}^F) = \bigoplus_{(s)}^\perp \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s)).$$

11.C. Partition en séries rationnelles. Dans cette sous-section, nous montrons qu'il est possible de remplacer "série géométrique" par "série rationnelle" dans l'énoncé du théorème de Deligne-Lusztig précédent. Ce résultat est bien connu : il était annoncé dans [Lu3, 7.3] et Lusztig y donnait une indication pour la preuve. Une esquisse plus complète peut aussi être trouvée dans [DiMi2, 14.50]. La preuve (complète) que nous donnons ici ne prétend à aucune originalité : il s'agit juste de suivre les indications des précédents auteurs. Nous l'avons incluse car elle s'inscrit bien dans le cadre des méthodes qui seront développées tout au long de cet article. Nous commençons par des rappels élémentaires.

Proposition 11.5. Soient $(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s}) \in \nabla^*(\tilde{\mathbf{G}}, F)$ et $z \in (\text{Ker } i^*)^{F*}$. Posons $(\mathbf{T}, s) = {}^*\mathfrak{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s})$. Alors

- (a) $\text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) = R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s)$.
- (b) $R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}z) = R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(\tilde{s})\hat{z}^{\tilde{\mathbf{G}}}$.

DÉMONSTRATION - (a) résulte du lemme 9.3 et de la proposition 10.10 tandis que (b) découle du lemme 10.11 et de la proposition 9.2. ■

Corollaire 11.6. Soit \tilde{s} un élément semi-simple de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F*}$ et soit $z \in (\text{Ker } i^*)^{F*}$. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}z]) \\ \gamma & \longmapsto & \gamma\hat{z} \end{array}$$

est bijective.

Le lien entre les séries rationnelles de \mathbf{G}^F et les séries géométriques (ou rationnelles) de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ sont donnés par la proposition suivante.

Proposition 11.7. Soit \tilde{s} un élément semi-simple de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F*}$ et soit $s = i^*(\tilde{s})$. Alors :

- (a) Si $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$ et si γ est une composante irréductible de la restriction de $\tilde{\gamma}$ à \mathbf{G}^F , alors $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.
- (b) Soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Alors il existe $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$ tel que γ est une composante irréductible de la restriction de $\tilde{\gamma}$ à \mathbf{G}^F .

DÉMONSTRATION - (a) Soit W le groupe de Weyl de $\tilde{\mathbf{G}}$ relatif à $\tilde{\mathbf{T}}_0$. Pour tout $w \in W$, nous choisissons un tore maximal F -stable $\tilde{\mathbf{T}}_w$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ de type w par rapport à $\tilde{\mathbf{T}}_0$. On pose aussi

$$n_w = R_{\tilde{\mathbf{T}}_w}^{\tilde{\mathbf{G}}}(1_{\tilde{\mathbf{T}}_w^F})(1)$$

où $1_{\tilde{\mathbf{T}}_w^F}$ est le caractère trivial de $\tilde{\mathbf{T}}_w^F$. Alors, d'après [Lu2, corollaire 2.11], on a

$$\sum_{\tilde{\gamma} \in \text{Irr } \tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{\gamma}(1)\tilde{\gamma} = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \left(n_w \sum_{\tilde{\theta} \in (\tilde{\mathbf{T}}_w^F)} R_{\tilde{\mathbf{T}}_w}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\theta}) \right).$$

En projetant orthogonalement cette égalité sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$ (voir corollaire 11.3), on obtient

$$\sum_{\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])} \tilde{\gamma}(1) \tilde{\gamma} = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \left(n_w \sum_{\substack{\tilde{\theta} \in (\tilde{\mathbf{T}}_w^F) \\ (\tilde{\mathbf{T}}_w, \tilde{\theta}) \in \nabla(\tilde{\mathbf{G}}, F, [\tilde{s}])}} R_{\tilde{\mathbf{T}}_w}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\theta}) \right).$$

Donc, si $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$ et si γ est une composante irréductible de la restriction de $\tilde{\gamma}$ à \mathbf{G}^F , alors il existe $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \in \nabla(\tilde{\mathbf{G}}, F, [\tilde{s}])$ tel que γ soit une composante du caractère virtuel $\text{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\theta})$. Il résulte du corollaire 9.5 et de la proposition 11.5 que $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Cela montre (a).

(b) Soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Alors il existe un tore maximal F^* -stable \mathbf{T}^* de \mathbf{G}^* contenant s tel que γ est une composante irréductible de $R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s)$. Soit $\tilde{\mathbf{T}}^* = i^{*-1}(\mathbf{T}^*)$. Alors, d'après la proposition 11.5, γ est une composante irréductible de la restriction de $R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})$ à \mathbf{G}^F . En particulier, il existe une composante irréductible $\tilde{\gamma}$ de $R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})$ telle que γ soit une composante irréductible de la restriction de $\tilde{\gamma}$ à \mathbf{G}^F . Mais $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$ par définition, donc (b) est démontré. ■

Théorème 11.8 (Lusztig).

- (a) Soit s un élément semi-simple de \mathbf{G}^{*F^*} , soit $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s])$, soit \mathbf{U} le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de \mathbf{G} contenant \mathbf{T} et soit k un entier naturel. Alors toute composante irréductible du \mathbf{G}^F -module $H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta$ appartient à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.
- (b) On a

$$\text{Irr } \mathbf{G}^F = \coprod_{[s]} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]),$$

où $[s]$ parcourt les classes de conjugaison rationnelles d'éléments semi-simples de \mathbf{G}^{*F^*} .

DÉMONSTRATION - (a) Soit $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}$. Alors $\text{Ind}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \gamma$ est un sous- $\tilde{\mathbf{G}}^F$ -module of

$$\text{Ind}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta \simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\tilde{\mathbf{U}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \tilde{\mathbf{T}}^F} \text{Ind}_{\tilde{\mathbf{T}}^F}^{\tilde{\mathbf{T}}^F} \theta$$

(voir l'isomorphisme 10.8) donc il existe une extension $\tilde{\theta}$ de θ à $\tilde{\mathbf{T}}^F$ et une composante irréductible $\tilde{\gamma}$ du $\tilde{\mathbf{G}}^F$ -module $H_c^k(\mathbf{Y}_{\tilde{\mathbf{U}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \tilde{\mathbf{T}}^F} \tilde{\theta}$ tels que γ soit une composante irréductible de la restriction de $\tilde{\gamma}$ à \mathbf{G}^F . D'après le corollaire 9.5, on a $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta}) \in \nabla(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{t}])$ pour un élément semi-simple \tilde{t} de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\tilde{t}) = s$. Donc, par le théorème 11.2 (a), $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{t}])$. Il résulte alors de la proposition 11.7 (a) que $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.

(b) Soient s_1 et s_2 deux éléments semi-simples de \mathbf{G}^{*F^*} tels que $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s_1])$ et $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s_2])$ ont un élément en commun, disons γ . Pour $k = 1$ ou 2 , soit $(\mathbf{T}_k, \theta_k) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s_k])$ tel que γ soit une composante irréductible de $R_{\mathbf{T}_k}^{\mathbf{G}}(\theta_k)$. Soit \mathbf{U}_k le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de \mathbf{G} contenant \mathbf{T}_k et soit $\tilde{\mathbf{T}}_k$ le tore maximal F -stable de $\tilde{\mathbf{G}}$ contenant \mathbf{T}_k . Alors il existe un entier naturel n_k tel que γ soit une composante irréductible de $H_c^{n_k}(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_k}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}_k^F} \theta_k$. Si $\tilde{\gamma}$ est une composante irréductible de $\text{Ind}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \gamma$, alors, grâce aux isomorphismes 10.8 et 10.9, il existe un caractère linéaire $\tilde{\theta}_k : \tilde{\mathbf{T}}_k^F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ tel que $\tilde{\gamma}$ est une composante irréductible du $\tilde{\mathbf{G}}^F$ -module $H_c^{n_k}(\mathbf{Y}_{\tilde{\mathbf{U}}_k}^{\tilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \tilde{\mathbf{T}}_k^F} \tilde{\theta}_k$. Mais $(\tilde{\mathbf{T}}_k, \tilde{\theta}_k) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [\tilde{s}_k])$ pour un élément semi-simple $\tilde{s}_k \in \tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\tilde{s}_k) = s_k$. Donc $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}_1]) \cap \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}_2])$. Par conséquent, d'après le corollaire 11.3 et le théorème 11.2 (a) appliqué à $\tilde{\mathbf{G}}^F$, on obtient que \tilde{s}_1 et \tilde{s}_2 sont conjugués sous $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$. Cela implique que $[s_1] = [s_2]$. ■

Si s est un élément semi-simple de \mathbf{G}^{*F^*} , nous noterons $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$ le sous- $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de $\text{Cent}(\mathbf{G}^F)$ engendré par $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Le théorème 11.2 (b) montre que

$$(11.9) \quad \text{Cent}(\mathbf{G}^F) = \bigoplus_{[s]} \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s]).$$

11.D. Induction de Lusztig et séries de Lusztig rationnelles. Soit \mathbf{P} un sous-groupe parabolique de \mathbf{G} et supposons que \mathbf{P} admet un sous-groupe de Levi F -stable \mathbf{L} . Soit \mathbf{L}^* un sous-groupe de Levi F^* -stable de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{L} . Alors le foncteur de Lusztig $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ préserve les séries de Lusztig :

Théorème 11.10 (Lusztig). *Soient s un élément semi-simple de \mathbf{L}^{*F*} , $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{L}^{*F*}})$ et $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$. Alors $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F*}})$.*

DÉMONSTRATION - Soit $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{L}, F, [s]_{\mathbf{L}^{*F*}})$ tel que γ est une composante irréductible de $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$. Notons qu'alors $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s]_{\mathbf{G}^{*F*}})$. Soit \mathbf{B} un sous-groupe de Borel de \mathbf{L} contenant \mathbf{T} . Nous notons \mathbf{V} et \mathbf{U} les radicaux unipotents de \mathbf{B} et \mathbf{P} respectivement. Alors il existe un entier naturel k tel que γ soit une composante irréductible du \mathbf{G}^F -module $H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \lambda$ et il existe un entier k' such that λ soit une composante irréductible du \mathbf{L}^F -module $H_c^{k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{L}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{T}^F} \theta$. Par suite, γ est une composante irréductible du \mathbf{G}^F -module

$$H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} \left(H_c^{k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{L}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{T}^F} \theta \right) \simeq \left(H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} H_c^{k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{L}}) \right) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{T}^F} \theta.$$

Mais, par la formule de Künneth et d'après [DiMi2, preuve de 11.5], $H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{L}^F} H_c^{k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{L}})$ est un sous- \mathbf{G}^F -module- \mathbf{T}^F de $H_c^{k+k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}\mathbf{U}}^{\mathbf{G}})$, donc γ est une composante irréductible de $H_c^{k+k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{T}^F} \theta$, ce qui montre que $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F*}})$ d'après le théorème 11.8 (a). ■

Corollaire 11.11. *Soit s un élément semi-simple de \mathbf{G}^{*F*} , soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F*}})$ et soit λ une composante irréductible de ${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \gamma$. Alors $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [t]_{\mathbf{L}^{*F*}})$ pour un élément semi-simple $t \in \mathbf{L}^{*F*}$ qui est \mathbf{G}^{*F*} -conjugué à s .*

11.E. Stabilisateurs de caractères irréductibles de \mathbf{G}^F . Le résultat suivant a été montré par Lusztig [Lu7, proposition 10]. Pour cela, il a tout d'abord réduit le problème au cas où \mathbf{G} est quasi-simple. Puisque ce résultat est évident lorsque $\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F$ est cyclique, il ne lui restait à traiter que le cas des groupes de type D_{2n} . Un délicat argument de comptage lui a alors permis de conclure. Il serait plus satisfaisant d'avoir une preuve plus directe, mais nous en sommes incapables. Notons que cet argument de comptage est présenté en détails dans [CaEn, chapitre 16].

Théorème 11.12 (Lusztig). *Soit $\tilde{\gamma}$ un caractère irréductible de $\tilde{\mathbf{G}}^F$. Alors la restriction de $\tilde{\gamma}$ à \mathbf{G}^F est sans multiplicité.*

QUESTION - Le groupe $\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F$ est un p' -groupe et, si s est un p' -élément de $\tilde{\mathbf{G}}^F$, alors $\tilde{\mathbf{G}}^F = C_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(s) \cdot \mathbf{G}^F$ car, s étant semi-simple, il est contenu dans un tore maximal. Il est alors naturel de se poser la question suivante :

Soit G un groupe fini et soit N un sous-groupe distingué de G . On suppose que G/N est un p' -groupe et que $G = C_G(g)N$ pour tout p' -élément $g \in G$. Est-ce que la restriction à N d'un caractère irréductible de G est toujours sans multiplicité ?

D'après ce qui précède, une réponse positive à cette question fournirait une preuve du théorème 11.12 qui n'utilise pas la classification des groupes réductifs finis. □

Le morphisme $\hat{\omega}_s^0 \circ \sigma_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{-1} : \tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F \rightarrow (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F*})^{\wedge}$ est surjectif. Nous noterons $\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$ le sous-groupe de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ tel que $\tilde{\mathbf{G}}^F/\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$ soit isomorphe à $(A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F*})^{\wedge}$ via ce morphisme. Bien sûr, $\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$ contient $\mathbf{G}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F$.

Corollaire 11.13. *Soient s un élément semi-simple de \mathbf{G}^{*F*} et $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Soit $\tilde{\mathbf{G}}^F(\gamma)$ le stabilisateur de γ dans $\tilde{\mathbf{G}}^F$. Alors $\tilde{\mathbf{G}}^F(\gamma)$ contient $\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$. En d'autres termes, $\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$ (ou $\text{Ker } \hat{\omega}_s^0$) agit trivialement sur $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.*

DÉMONSTRATION - Soit \tilde{s} un élément semi-simple de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F*}$ tel que $s = i^*(\tilde{s})$. D'après le théorème 11.12 et la proposition 11.7 (b), il existe $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$ tel que

$$\langle \text{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{\gamma}, \gamma \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1.$$

Donc, par la théorie de Clifford et en utilisant l'isomorphisme $(\text{Ker } i^*)^{F*} \simeq (\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F)^{\wedge}$, il suffit de montrer l'assertion suivante :

Si $z \in (\text{Ker } i^)^{F*}$ vérifie $\tilde{\gamma} \otimes \hat{z} = \tilde{\gamma}$, alors $z \in \text{Im } \varphi_s$.*

Soit donc $z \in (\text{Ker } i^*)^{F^*}$ tel que $\tilde{\gamma} \otimes \hat{z} = \tilde{\gamma}$. Alors $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]) \cap \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}z])$ d'après le corollaire 11.6. Donc \tilde{s} et $\tilde{s}z$ sont $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ -conjugués ce qui montre que z appartient à l'image de φ_s (voir lemme 8.3). ■

Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, rappelons que $\omega_s^0(a)$ est un caractère linéaire de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$; posons

$$\text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a) = \{\gamma \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s)) \mid \forall z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})), \tau_z^{\mathbf{G}} \gamma = \omega_s^0(a)(z)\gamma\}$$

et $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \{\gamma \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s]) \mid \forall z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})), \tau_z^{\mathbf{G}} \gamma = \omega_s^0(a)(z)\gamma\}.$

Le corollaire 11.13 montre que

$$(11.14) \quad \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s)) = \bigoplus_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}^{\perp} \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$$

et

$$(11.15) \quad \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s]) = \bigoplus_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}^{\perp} \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a).$$

Nous verrons plus tard que, si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, alors $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) \neq \emptyset$ (voir 17.2).

11.F. Fonctions absolument cuspidales. Posons $\text{Cus}(\mathbf{G}^F, (s)) = \text{Cus}(\mathbf{G}^F) \cap \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s))$ et $\text{Cus}(\mathbf{G}^F, [s]) = \text{Cus}(\mathbf{G}^F) \cap \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$. De plus, si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, nous poserons $\text{Cus}(\mathbf{G}^F, (s), a) = \text{Cus}(\mathbf{G}^F) \cap \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$ et $\text{Cus}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \text{Cus}(\mathbf{G}^F) \cap \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$. On a alors, d'après le théorème 11.10,

$$(11.16) \quad \text{Cus}(\mathbf{G}^F) = \bigoplus_{(s)}^{\perp} \text{Cus}(\mathbf{G}^F, (s)) = \bigoplus_{[s]}^{\perp} \text{Cus}(\mathbf{G}^F, [s]).$$

De plus, puisque $\text{Cus}(\mathbf{G}^F)$ est stable par l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, il résulte de 11.14 et 11.15

$$(11.17) \quad \text{Cus}(\mathbf{G}^F, (s)) = \bigoplus_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}^{\perp} \text{Cus}(\mathbf{G}^F, (s), a)$$

et

$$(11.18) \quad \text{Cus}(\mathbf{G}^F, [s]) = \bigoplus_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}^{\perp} \text{Cus}(\mathbf{G}^F, [s], a).$$

Chapitre IV. Théorie de Harish-Chandra

Soit $\tilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe de Levi F -stable d'un sous-groupe parabolique F -stable $\tilde{\mathbf{P}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ et soit $\tilde{\lambda}$ un caractère cuspidal de $\tilde{\mathbf{L}}^F$. Notons $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{G}$ et posons $\lambda = \text{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \tilde{\lambda}$. Alors toutes les composantes irréductibles de λ sont cuspidales. Dans la section 12, nous montrons que ces composantes irréductibles ne sont pas conjuguées sous $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$, c'est-à-dire qu'elles définissent des séries de Harish-Chandra différentes. L'ingrédient principal est un théorème de M. Geck [Ge, page 400]. Nous étudions dans la section 13 les algèbres d'endomorphismes des induits de ces caractères cuspidaux pour obtenir un paramétrage global des composantes irréductibles de $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \lambda$.

12. AUTOUR D'UN THÉORÈME DE M. GECK

12.A. Rappels. Un caractère irréductible γ de \mathbf{G}^F est dit *cuspidal* si, pour tout sous-groupe parabolique F -stable \mathbf{P} de \mathbf{G} et pour tout complément de Levi F -stable de \mathbf{P} , on a $*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \gamma = 0$. Les faits suivants se déduisent immédiatement des propositions 10.10 et 10.11.

Proposition 12.1. *Soit $\tilde{\gamma} \in \text{Irr } \tilde{\mathbf{G}}^F$, soit γ une composante irréductible de la restriction de $\tilde{\gamma}$ à \mathbf{G}^F et soit $\tau \in (\tilde{\mathbf{G}}^F / \mathbf{G}^F)^\wedge$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\tilde{\gamma}$ est cuspidal.
- (2) $\tilde{\gamma} \otimes \tau$ est cuspidal.
- (3) γ est cuspidal.

Si \mathbf{L} est un complément de Levi F -stable d'un sous-groupe parabolique F -stable \mathbf{G} de \mathbf{P} et si λ est un caractère irréductible cuspidal de \mathbf{L}^F , alors $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$ est appelé une *série de Harish-Chandra*. La proposition 12.1 montre qu'il existe un lien entre les séries de Harish-Chandra de \mathbf{G}^F et celles de $\tilde{\mathbf{G}}^F$. Ce lien est pour l'essentiel l'objet de ce chapitre.

12.B. Notations. Dans ce chapitre, nous fixons un sous-groupe parabolique F -stable $\tilde{\mathbf{P}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ et un complément de Levi F -stable $\tilde{\mathbf{L}}$ de $\tilde{\mathbf{P}}$. Posons $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} \cap \mathbf{G}$. Soit \mathbf{U} le radical unipotent de $\tilde{\mathbf{P}}$ ou de \mathbf{P} . Nous fixons un caractère irréductible *cuspidal* $\tilde{\lambda}$ de $\tilde{\mathbf{L}}^F$ et nous posons

$$\lambda = \text{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \tilde{\lambda}.$$

Nous fixons aussi une composante irréductible λ_1 de λ . Pour tout $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F / \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, nous notons $\lambda_x = {}^x \lambda_1$. Alors, d'après le théorème de Lusztig 11.12, on a

$$\lambda = \sum_{x \in \tilde{\mathbf{L}}^F / \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} {}^x \lambda_1 = \sum_{x \in \tilde{\mathbf{L}}^F / \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \lambda_x.$$

Puisque le groupe $\tilde{\mathbf{L}}^F / \mathbf{L}^F$ est abélien, on a $\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_x) = \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ pour tout $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F / \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.

Nous notons $\tilde{\lambda}^+$ (respectivement λ_x^+ , $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F / \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$) le caractère irréductible de $\tilde{\mathbf{P}}^F$ (respectivement \mathbf{P}^F) obtenu en composant le caractère $\tilde{\lambda}$ (respectivement λ_x) avec le morphisme surjectif $\tilde{\mathbf{P}}^F \rightarrow \tilde{\mathbf{L}}^F$ (respectivement $\mathbf{P}^F \rightarrow \mathbf{L}^F$). Nous fixons un $\tilde{\mathbf{P}}^F$ -module \tilde{M} ayant $\tilde{\lambda}^+$ comme caractère. Nous notons M la restriction de \tilde{M} à \mathbf{P}^F et M_x le sous- \mathbf{P}^F -module irréductible de M ayant λ_x^+ comme caractère. Alors

$$\text{Ind}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{M} = \{ \tilde{f} : \tilde{\mathbf{G}}^F \rightarrow \tilde{M} \mid \forall y \in \tilde{\mathbf{P}}^F, \forall g \in \tilde{\mathbf{G}}^F, \tilde{f}(yg) = y \cdot \tilde{f}(g) \},$$

$$\text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M = \{ f : \mathbf{G}^F \rightarrow M \mid \forall y \in \mathbf{P}^F, \forall g \in \mathbf{G}^F, f(yg) = y \cdot f(g) \}$$

et des descriptions similaires sont valides pour $\text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_x$. Alors

$$(12.2) \quad \text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M = \bigoplus_{x \in \tilde{\mathbf{L}}^F / \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_x.$$

Le $\tilde{\mathbf{G}}^F$ -module $\text{Ind}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{M}$ a pour caractère $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$. De même, les \mathbf{G}^F -modules $\text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M$ et $\text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_x$ ont pour caractères $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \lambda$ et $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \lambda_x$ respectivement.

Soit $f \in \text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M$. Notons \tilde{f} la fonction $\tilde{\mathbf{G}}^F \rightarrow \tilde{M} = M$ définie comme suit. Soit $\tilde{g} \in \tilde{\mathbf{G}}^F$. Alors il existe $\tilde{x} \in \tilde{\mathbf{P}}^F$ et $g \in \mathbf{G}^F$ tels que $\tilde{g} = \tilde{x}g$. On pose $\tilde{f}(\tilde{g}) = \tilde{x} \cdot f(g)$: remarquons que $\tilde{f}(\tilde{g})$ ne dépend pas

du choix de $\tilde{x} \in \tilde{\mathbf{P}}^F$ et $g \in \mathbf{G}^F$ tels que $\tilde{g} = \tilde{x}g$. Alors la restriction de \tilde{f} à \mathbf{G}^F est égale à f et il est facile de vérifier que l'application

$$(12.3) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M & \longrightarrow & \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \text{Ind}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{M} \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

est un isomorphisme de \mathbf{G}^F -modules.

Le groupe $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ est naturellement isomorphe à $W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) = N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/\mathbf{L}^F$. En général, nous nous référerons à ce dernier car il est plus adapté à notre situation. Par exemple, il est naturellement un sous-groupe de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$.

12.C. Un théorème de M. Geck. Dans [Ge, corollaire 2], Geck énonce le résultat suivant : *le caractère $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\lambda_1)$ a une composante irréductible de multiplicité 1.* Cependant, pour l'obtenir, il a en fait démontré le résultat plus fort suivant [Ge, page 400] :

Théorème 12.4 (Geck). *Le caractère $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda$ a une composante irréductible de multiplicité 1.*

ESQUISSE DE LA PREUVE DE GECK - Soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ deux composantes irréductibles de $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$ dont la restriction à \mathbf{G}^F ont une composante irréductible commune. Alors, par la théorie de Clifford et par le théorème 11.12, ces deux restrictions coïncident. En particulier, $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$. Pour prouver le théorème 12.4, il est donc suffisant de montrer qu'il existe une composante irréductible $\tilde{\gamma}$ de $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$, apparaissant avec la multiplicité 1 et telle que $\tilde{\gamma}(1) \neq \tilde{\gamma}'(1)$ pour toute autre composante irréductible $\tilde{\gamma}'$ de $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$. En fait, Geck montre que le degré générique de la signature de l'algèbre de Hecke associée à la donnée $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ a une p -partie supérieure à celle des degrés génériques des autres caractères irréductibles de l'algèbre de Hecke [Ge, théorème 1], ce qui permet de conclure. ■

REMARQUE - Lusztig [Lu5] a montré que $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$ possède une composante irréductible de multiplicité 1. Donc le théorème de Geck généralise celui de Lusztig. Mais il faut bien noter que la preuve de Geck utilise le résultat de Lusztig. □

Cette version plus forte 12.4 du théorème de Geck est nécessaire pour montrer le résultat (très utile) suivant :

Corollaire 12.5.

- (a) *Pour tout $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, le caractère $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_x$ possède une composante irréductible de multiplicité 1.*
- (b) *Si x et y sont deux éléments distincts de $\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, alors les caractères cuspidaux λ_x et λ_y ne sont pas conjugués sous $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$. De façon équivalente,*

$$\langle R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_x, R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_y \rangle_{\mathbf{G}^F} = 0.$$

- (c) *On a $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) = W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda_x)$ pour tout $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.*
- (d) *Si γ est une composante irréductible de $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda$, alors $\tilde{\mathbf{G}}^F(\gamma)$ est contenu dans $\mathbf{G}^F.\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.*

DÉMONSTRATION - (a) résulte du théorème 12.4 et de l'égalité :

$$R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda = \sum_{x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} {}^x R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_1.$$

En fait, (a) est l'énoncé original de Geck [Ge, corollaire 2].

Prouvons maintenant (b) et (c). Les groupes $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$ et $\tilde{\mathbf{L}}^F$ agissent sur $\text{Irr } \mathbf{L}^F$ et ces deux actions commutent. Donc, si x et y appartiennent à $\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ et si $n \in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$ est tel que ${}^n\lambda_x = \lambda_y$, alors $n \in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. Par conséquent, prouver (b) et (c) est équivalent à prouver que $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ agit trivialement sur $E = \{\lambda_x \mid x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)\}$. Puisque les actions de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ et $\tilde{\mathbf{L}}^F$ sur E commutent, toutes les orbites de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ sur E ont le même cardinal, disons n . Mais alors n divise la multiplicité de toute composante irréductible de $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda$. Donc, d'après le théorème 12.4, $n = 1$ et (b) et (c) en résultent.

(d) Soit $g \in \tilde{\mathbf{G}}^F$ tel que ${}^g\gamma = \gamma$. On peut supposer que $g \in \tilde{\mathbf{L}}^F$. Par hypothèse, il existe $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ tel que γ est une composante irréductible de $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_x$. Mais ${}^g\gamma = \gamma$ donc γ est aussi une composante irréductible de $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_x$. Donc, d'après (b), $g \in \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_x) = \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. ■

12.D. Une extension centrale de $W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Posons

$$W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) = \{(w, \theta) \in W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}) \times (\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge \mid w\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \otimes \theta\}.$$

Notons qu'en fait $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) \subset W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) \times (\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge$. Nous identifions $W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ avec le sous-groupe $W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) \times \{1\}$ de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. De même, nous identifions $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ avec le sous-groupe $\{1\} \times (\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. La première projection

$$\begin{array}{ccc} W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) & \longrightarrow & W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) \\ (w, \theta) & \longmapsto & w \end{array}$$

est surjective (d'après le théorème 11.12 et la théorie de Clifford) et son noyau est égal à $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$. De plus, $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ est central dans $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. La deuxième projection

$$\begin{array}{ccc} W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge \\ (w, \theta) & \longmapsto & \theta \end{array}$$

n'est pas surjective en général et son noyau est $W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Nous notons $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$ le sous-groupe de $\tilde{\mathbf{L}}^F$ contenant \mathbf{L}^F tel que l'image de cette deuxième projection soit $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$. En fait, le groupe $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$ est contenu dans $\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. On a des isomorphismes canoniques

$$(12.6) \quad W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) \simeq (\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$$

et

$$(12.7) \quad W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) \simeq (\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge.$$

Résumons tout ceci dans le diagramme suivant, dans lequel toutes les suites horizontales ou verticales sont exactes et tous les carrés sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & 1 \\ & & & \downarrow & & & \downarrow \\ & & & W_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) & \xlongequal{\quad} & W_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) & \\ & & & \downarrow & & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge & \longrightarrow & W'_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) & \longrightarrow & W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge \longrightarrow 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 1 & & 1 \end{array}$$

REMARQUE 12.8 - Les isomorphismes 12.6 et 12.7 entraînent que les groupes $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ et $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ sont abéliens. □

Proposition 12.9. *On a :*

- (a) $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge = \{\theta \in (\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge \mid (R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \mathbf{P}}^{\tilde{\mathbf{G}}}\tilde{\lambda}) \otimes \theta = R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \mathbf{P}}^{\tilde{\mathbf{G}}}\tilde{\lambda}\}.$
- (b) Si $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$, alors $\tilde{\mathbf{G}}^F(\gamma)$ contient $\mathbf{G}^F.\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$.

DÉMONSTRATION - (a) Soit $\theta \in (\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$. Alors il existe $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}})$ tel que $(w, \theta) \in W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Par conséquent, ${}^w\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \otimes \theta$. Donc, d'après la proposition 10.11, on a $(R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}) \otimes \theta = R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$. Réciproquement, soit $\theta \in (\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge$ tel que $(R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}) \otimes \theta = R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$. Alors, d'après la proposition 10.11, on a $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\lambda} \otimes \theta) = R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$. De plus, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\lambda} \otimes \theta$ sont cuspidaux d'après la proposition 12.1. Donc il existe $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$ tel que ${}^w\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \otimes \theta$. En d'autres termes, $(w, \theta) \in W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ donc $\theta \in (\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$.

(b) Soit $\tilde{\gamma}$ une composante irréductible de $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$ telle que γ soit une composante irréductible de la restriction de $\tilde{\gamma}$ à \mathbf{G}^F . D'après le théorème 11.12 et la théorie de Clifford, (b) est équivalent à l'énoncé suivant : si $\theta \in (\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge$ est tel que $\tilde{\gamma} \otimes \theta = \tilde{\gamma}$, alors $\theta \in (\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$. Mais, si $\tilde{\gamma} \otimes \theta = \tilde{\gamma}$, alors $\tilde{\gamma}$ est une composante irréductible de $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda}$ ainsi que de $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\lambda} \otimes \theta)$. Par suite, $R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\lambda} = R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\lambda} \otimes \theta)$ et donc $\theta \in (\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$ d'après (a). ■

Corollaire 12.10. *Si $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$, alors $\mathbf{G}^F.\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \subset \tilde{\mathbf{G}}^F(\gamma) \subset \mathbf{G}^F.\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.*

13. ALGÈBRES D'ENDOMORPHISMES

13.A. Description. Nous noterons dans ce chapitre $\tilde{\mathcal{H}}$ l'algèbre d'endomorphismes du $\tilde{\mathbf{G}}^F$ -module $\text{Ind}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{M}$ et par \mathcal{H} l'algèbre d'endomorphismes du \mathbf{G}^F -module $\text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M$. Alors $\tilde{\mathcal{H}}$ est, via l'isomorphisme 12.3, une sous-algèbre de \mathcal{H} . Pour tout $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, nous notons \mathcal{H}_x l'algèbre d'endomorphismes du \mathbf{G}^F -module $\text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_x$. Alors, d'après le corollaire 12.5 (b), on a

$$\mathcal{H} = \prod_{x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \mathcal{H}_x$$

et donc

$$\text{Irr } \mathcal{H} = \coprod_{x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \text{Irr } \mathcal{H}_x.$$

Cela nous donne un morphisme d'algèbres $\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}_x$ pour tout $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.

D'après [HoLe1, lemme 6.5] et d'après le corollaire 12.5, le caractère irréductible λ_1 de \mathbf{L}^F s'étend en un caractère irréductible ν_1 de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$.

Lemme 13.1.

- (a) *Le stabilisateur de ν_1 dans $\tilde{\mathbf{L}}^F$ est $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$.*
- (b) *Le stabilisateur, dans $\tilde{\mathbf{L}}^F$, de la restriction de ν_1 à $N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ est $\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.*

DÉMONSTRATION - Soit $\tilde{N} = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda).\tilde{\mathbf{L}}^F$. Alors, d'après la formule de Mackey, on a

$$\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{N}} \text{Ind}_{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{\tilde{N}} \nu_1 = \text{Ind}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \lambda_1.$$

Le caractère $\text{Ind}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \lambda_1$ est sans multiplicité, donc le caractère $\text{Ind}_{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{\tilde{N}} \nu_1$ est sans multiplicité. Soit $\tilde{\nu}$ une de ses composantes irréductibles telle que $\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{N}} \tilde{\nu}$ a $\tilde{\lambda}$ comme composante irréductible. Alors

$$\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{N}} \tilde{\nu} = \sum_{\tau \in (\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge} \tilde{\lambda} \otimes \tilde{\tau}$$

où, pour chaque $\tau \in (\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$, $\tilde{\tau}$ désigne une extension de τ à $\tilde{\mathbf{L}}^F$: alors le caractère $\tilde{\lambda} \otimes \tilde{\tau}$ ne dépend que de τ et non du choix de $\tilde{\tau}$. Cette décomposition a lieu car l'orbite de $\tilde{\lambda}$ sous cette action de \tilde{N} est $\{\tilde{\lambda} \otimes \tilde{\tau} \mid \tau \in (\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge\}$.

Soit θ un caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \simeq \tilde{N}/N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Alors, par la théorie de Clifford, l'énoncé (a) du lemme 13.1 est équivalent à l'assertion suivante :

$$\tilde{\nu} \otimes \theta = \tilde{\nu} \text{ si et seulement si } \tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \subset \text{Ker } \theta.$$

Supposons tout d'abord que $\tilde{\nu} \otimes \theta = \tilde{\nu}$. Alors

$$\begin{aligned} (\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{N}} \tilde{\nu}) \otimes \theta &= \text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{N}} (\tilde{\nu} \otimes \theta) \\ &= \text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{N}} \tilde{\nu} \end{aligned}$$

ce qui implique que $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \subset \text{Ker } \theta$.

Réciproquement, supposons que $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \subset \text{Ker } \theta$. Alors $\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{N}} (\tilde{\nu} \otimes \theta) = \text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{N}} \tilde{\nu}$ donc $\tilde{\nu} \otimes \theta$ est une composante irréductible de $\text{Ind}_{N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)}^{\tilde{N}} \nu_1$ et $\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{N}} (\tilde{\nu} \otimes \theta)$ a $\tilde{\lambda}$ composante irréductible. Ceci implique que $\tilde{\nu} \otimes \theta = \tilde{\nu}$. D'où (a).

(b) découle d'un argument similaire. ■

Pour tout $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F(\lambda_1)$, nous choisissons un représentant \tilde{x} de x dans $\tilde{\mathbf{L}}^F$. Alors $\tilde{x}\nu_1$ est une extension de λ_x à $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. Nous posons

$$\nu = \sum_{x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F(\lambda_1)} \tilde{x}\nu_1.$$

Alors ν est une extension de λ à $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. Pour chaque $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F(\lambda_1)$, nous notons μ_x la restriction de $\tilde{x}\nu_1$ à $N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$.

REMARQUE 13.2 - Soit $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F(\lambda_1)$. Alors, si $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \neq \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, le caractère $\tilde{x}\nu_1$ dépend du choix de \tilde{x} d'après le lemme 13.1 (a), tandis que le caractère μ_x n'en dépend pas d'après le lemme 13.1 (b). Ceci justifie la notation. □

Posons

$$\mu = \sum_{x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F(\lambda_1)} \mu_x$$

de sorte que μ est la restriction de ν à $N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Par la formule de Mackey, on a

$$\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \text{Ind}_{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \mu_1 = \text{Ind}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \lambda_1$$

donc il existe une unique composante irréductible $\tilde{\mu}$ de $\text{Ind}_{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \mu_1$ telle que

$$\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \tilde{\mu} = \tilde{\lambda}.$$

D'après le lemme 13.1 (b), on a

$$(13.3) \quad \mu = \text{Res}_{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \tilde{\mu}.$$

Fixons une représentation $\tilde{\sigma} : N_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) \rightarrow \mathbf{GL}(\tilde{M})$ ayant pour caractère $\tilde{\mu}$ et une représentation $\sigma : N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) \rightarrow \mathbf{GL}(M)$ ayant pour caractère ν étendant toutes deux les représentations de $\tilde{\mathbf{L}}^F$ et \mathbf{L}^F sur \tilde{M} et M respectivement. Alors

$$(13.4) \quad \text{Res}_{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)} \sigma = \text{Res}_{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{N_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \tilde{\sigma}$$

d'après 13.3. Pour tout $x \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F(\lambda_1)$, notons σ_x la restriction de σ aux sous-espace M_x de M .

Pour tout $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$, nous notons \dot{w} un représentant de w dans $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ et nous définissons, pour tous $f \in \text{Ind}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{M}_1$ et $g \in \mathbf{G}^F$,

$$T_w(f)(g) = \sum_{u \in \mathbf{U}^F} \sigma_1(\dot{w}) f(\dot{w}^{-1} u g).$$

Alors, d'après [HoLe1, proposition 3.9], $(T_w)_{w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)}$ est une base de \mathcal{H}_1 . De même, nous définissons, pour tous $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$, $\tilde{f} \in \text{Ind}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{M}$ et $\tilde{g} \in \tilde{\mathbf{G}}^F$,

$$\tilde{T}_w(\tilde{f})(\tilde{g}) = \sum_{u \in \mathbf{U}^F} \tilde{\sigma}(\dot{w}) \tilde{f}(\dot{w}^{-1} u \tilde{g}).$$

Alors, encore d'après [HoLe1, proposition 3.9], $(\tilde{T}_w)_{w \in W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}$ est une base de $\tilde{\mathcal{H}}$.

D'après [HoLe1, corollaire 5.4], il existe des isomorphismes de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -algèbres

$$(13.5) \quad \mathcal{H}_1 \simeq \overline{\mathbb{Q}_\ell}[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)]$$

et

$$(13.6) \quad \tilde{\mathcal{H}} \simeq \overline{\mathbb{Q}_\ell}[W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})].$$

De plus, l'image de \tilde{T}_w dans \mathcal{H}_1 est T_w d'après 13.4 donc, par un argument de déformation, les isomorphismes ci-dessus peuvent être choisis de sorte que le diagramme

$$(13.7) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{H}} & \xrightarrow{\sim} & \overline{\mathbb{Q}_\ell}[W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{\sim} & \overline{\mathbb{Q}_\ell}[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)] \end{array}$$

soit commutatif. Nous ferons bien sûr ce choix-là par la suite.

REMARQUE 13.8 - Une fois choisie une racine carrée de q dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et une fois choisis ν_1 et $\tilde{\nu}$, alors les bijections entre ensembles de caractères irréductibles induites par les isomorphismes 13.5 et 13.6 sont uniquement déterminées (voir [HoLe2, théorème 4.8] et [BeCu, théorème 2.9]).

13.B. Paramétrage des caractères dans une série de Harish-Chandra. D'après le corollaire 12.5 (b), on a

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda) = \coprod_{x \in \tilde{\mathbf{L}}^F / \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda_x).$$

Les isomorphismes 13.5 et 13.6 induisent des bijections

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr } W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr } W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) \\ \chi & \longmapsto & \tilde{R}_\chi. \end{array}$$

Théorème 13.9. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$(a) \quad R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P} \lambda_1}^{\mathbf{G}} = \sum_{\eta \in \text{Irr } W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)} \eta(1) R_\eta.$$

(b) *Soit $\eta \in \text{Irr } W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ et $\chi \in \text{Irr } W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Alors*

$$\langle R_\eta, \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{R}_\chi \rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \text{Res}_{W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)} \eta, \chi \rangle_{W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}.$$

(c) *Soit $l \in \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ et soit ξ le caractère linéaire de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ associé à l via l'isomorphisme 12.7. Soit η un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. Alors*

$${}^l R_\eta = R_{\eta \otimes \xi}.$$

DÉMONSTRATION - (a) est immédiat.

(b) Faisons ici agir \mathbf{G}^F et $\tilde{\mathbf{G}}^F$ à droite sur M et \tilde{M} respectivement. Soient V_η (respectivement \tilde{V}_χ) un \mathcal{H}_1 -module (respectivement $\tilde{\mathcal{H}}$ -module) irréductible ayant pour caractère η (respectivement χ) à travers les isomorphismes 13.5 et 13.6. On voit V_η comme un \mathcal{H} -module. Posons $M_\eta = M^* \otimes_{\mathcal{H}} V_\eta$ et $\tilde{M}_\chi = \tilde{M}^* \otimes_{\tilde{\mathcal{H}}} \tilde{V}_\chi$. Alors M_η (respectivement \tilde{M}_χ) est un \mathbf{G}^F -module (respectivement $\tilde{\mathbf{G}}^F$ -module) à droite irréductible ayant pour caractère R_η (respectivement \tilde{R}_χ). On a

$$\begin{aligned} \langle R_\eta, \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{R}_\chi \rangle_{\mathbf{G}^F} &= \dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} \text{Hom}_{\mathbf{G}^F}(M_\eta, \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{M}_\chi) \\ &= \dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} M_\eta^* \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_\ell} \mathbf{G}^F} \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{M}_\chi \\ &= \dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} V_\eta^* \otimes_{\mathcal{H}} (M \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_\ell} \mathbf{G}^F} \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{M}^*) \otimes_{\tilde{\mathcal{H}}} \tilde{V}_\chi. \end{aligned}$$

Or, $\text{Res}_{\mathbf{G}^F} \tilde{M}^* = M^*$ et $M \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathbf{G}^F M^* = \mathcal{H}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle R_\eta, \text{Res}_{\mathbf{G}^F} \tilde{R}_\chi \rangle_{\mathbf{G}^F} &= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V_\eta^* \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H} \otimes_{\tilde{\mathcal{H}}} \tilde{V}_\chi \\ &= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V_\eta^* \otimes_{\tilde{\mathcal{H}}} \tilde{V}_\chi. \end{aligned}$$

La commutativité du diagramme 13.7 montre que ce dernier terme est égal à

$$\langle \text{Res}_{W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)} \eta, \chi \rangle_{W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})},$$

ce qui montre (b).

(c) Puisque $l \in \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, l'automorphisme $\tilde{\sigma}(l)$ de M stabilise M_1 . Soit $f \in \text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_1$. Posons

$$\begin{aligned} \omega_l(f) : \mathbf{G}^F &\longrightarrow M_1 \\ g &\longmapsto \tilde{\sigma}(l)(f(l^{-1}gl)). \end{aligned}$$

Alors $\omega_l(f) \in \text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_1$ et

$$\omega_l : \text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_1 \longrightarrow \text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_1$$

est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espaces vectoriels. De plus, si $g \in \mathbf{G}^F$, alors $l^{-1}gl$ agit sur $\text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_1$ comme $\omega_l^{-1}g\omega_l$.

Si e_η désigne l'idempotent primitif central de \mathcal{H}_1 associé à η , alors (c) est équivalent à l'égalité

$$\omega_l e_\eta \omega_l^{-1} = e_{\eta \otimes \xi}.$$

Par un argument de déformation, montrer cette égalité revient à montrer que

$$\omega_l T_w \omega_l^{-1} = \tau_w(l)^{-1} T_w$$

pour tout $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$, où τ_w est le caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ associé à l par l'isomorphisme

$$W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) \simeq (\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge.$$

Donc soient $f \in \text{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_1$ et $g \in \mathbf{G}^F$. Alors

$$\begin{aligned} (\omega_l T_w \omega_l^{-1} f)(g) &= \tilde{\sigma}(l)(T_w \omega_l^{-1} f)(l^{-1}gl) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{U}^F} \tilde{\sigma}(l) \sigma_1(\dot{w}) (\omega_l^{-1} f)(\dot{w}^{-1} u l^{-1} gl) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{U}^F} \tilde{\sigma}(l) \sigma_1(\dot{w}) \tilde{\sigma}(l)^{-1} \cdot f(l \dot{w}^{-1} u l^{-1} g) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{U}^F} \tilde{\sigma}(l) \sigma_1(\dot{w}) \tilde{\sigma}(l)^{-1} \cdot f(l \dot{w}^{-1} l^{-1} u g) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{U}^F} \tilde{\sigma}(l) \sigma_1(\dot{w}) \tilde{\sigma}(l)^{-1} \cdot f(l \dot{w}^{-1} l^{-1} \dot{w} \dot{w}^{-1} u g) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{U}^F} \tilde{\sigma}(l) \sigma_1(\dot{w}) \tilde{\sigma}(l)^{-1} \sigma_1(l \dot{w}^{-1} l^{-1} \dot{w}) \cdot f(\dot{w}^{-1} u g) \\ &= \tilde{\sigma}(l) \sigma_1(\dot{w}) \tilde{\sigma}(l)^{-1} \sigma_1(l \dot{w}^{-1} l^{-1} \dot{w}) \sigma_1(\dot{w})^{-1} \cdot (T_w f)(g). \end{aligned}$$

D'après 13.4, on a $\sigma_1(l \dot{w}^{-1} l^{-1} \dot{w}) = \tilde{\sigma}(l) \tilde{\sigma}(\dot{w}^{-1} l^{-1} \dot{w})$. Donc

$$(\omega_l T_w \omega_l^{-1} f)(g) = \tilde{\sigma}(l) \sigma_1(\dot{w}) \sigma_1(\dot{w}^{-1} l^{-1} \dot{w}) \sigma_1(\dot{w})^{-1} \cdot (T_w f)(g).$$

De plus, par définition de τ_w , la représentation

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1) &\longrightarrow \mathbf{GL}(M_1) \\ l &\longmapsto \sigma_1(\dot{w}) \sigma_1(\dot{w}^{-1} l \dot{w}) \sigma_1(\dot{w})^{-1} \end{aligned}$$

admet le même caractère que la représentation

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1) &\longrightarrow \mathbf{GL}(M_1) \\ l &\longmapsto \tau_w(l) \tilde{\sigma}(l) \end{aligned}$$

et leur restriction à \mathbf{L}^F est égale à σ_1 . Donc on a

$$\sigma_1(\dot{w}) \sigma_1(\dot{w}^{-1} l \dot{w}) \sigma_1(\dot{w})^{-1} = \tau_w(l) \tilde{\sigma}(l)$$

pour tout $l \in \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. D'où le résultat. ■

REMARQUE 13.10 - Une fois choisi l'isomorphisme d'algèbres $\tilde{\mathcal{H}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})]$, l'isomorphisme $\mathcal{H}_1 \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)]$ est déterminé à un caractère linéaire près de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ c'est-à-dire, d'après le théorème 13.9 (c), à conjugaison près par un élément de $\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. □

13.C. Paramétrage de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$. Soit maintenant η un caractère irréductible de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Alors la restriction de η au sous-groupe central $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ est un multiple d'un caractère linéaire de $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$. Donc η définit un élément x_η de $\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. Choisissons un relevé \tilde{x}_η de x_η dans $\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$ et soit ξ_η le caractère linéaire de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ associé à \tilde{x}_η par l'isomorphisme $(W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}))^\wedge \simeq \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$. Alors $\eta \otimes \xi_\eta^{-1}$ est un caractère irréductible de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ et $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ est contenu dans son noyau. Donc il peut être vu comme un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. On définit alors

$$(13.11) \quad R_\eta = \tilde{x}_\eta R_{\eta \otimes \xi_\eta^{-1}}.$$

Remarquons que R_η ne dépend pas du choix du représentant \tilde{x}_η de x_η (voir théorème 13.9 (c)). De plus, si η contient $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ dans son noyau, alors η peut être vu comme un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ et le caractère R_η défini par 13.11 coïncide avec le caractère R_η défini au début de la sous-section 13.B. S'il y a ambiguïté, ce caractère irréductible sera noté $R_\eta^{\mathbf{G}}$. Le théorème suivant est une conséquence de cette discussion :

Théorème 13.12.

(a) *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr } W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta \end{array}$$

est bijective.

(b) *On a*

$$R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \lambda = \sum_{\eta \in \text{Irr } W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \eta(1) R_\eta.$$

(c) *Soit η et χ deux caractères irréductibles de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ et $W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ respectivement. Alors*

$$\langle R_\eta, \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{R}_\chi \rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \text{Res}_{W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \eta, \chi \rangle_{W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}.$$

(d) *Soit $\eta \in \text{Irr } W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Alors $R_\eta \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda_{x_\eta})$.*

(e) *Soient $l \in \tilde{\mathbf{L}}^F$ et $\eta \in \text{Irr } W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Notons ξ_l le caractère linéaire de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ associé à l via l'isomorphisme $(W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}))^\wedge \simeq \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$ induit par 12.6. Alors*

$${}^l R_\eta = R_{\eta \otimes \xi_l}.$$

Corollaire 13.13. *Soit η un caractère irréductible de $W'_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. Alors*

(a) *La restriction de η à $W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ est sans multiplicité.*

(b) *Soit $\tilde{\mathbf{L}}_\eta^F$ le sous-groupe de $\tilde{\mathbf{L}}^F$ contenant $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$ tel que*

$$\tilde{\mathbf{L}}_\eta^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \simeq \{\xi \in (W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}))^\wedge \mid \eta \otimes \xi = \eta\}.$$

(Rappelons que l'on a un isomorphisme $(W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}))^\wedge \simeq \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$.) Alors

$$\tilde{\mathbf{G}}^F(R_\eta) = \mathbf{G}^F \cdot \tilde{\mathbf{L}}_\eta^F.$$

DÉMONSTRATION - (a) résulte du théorème 13.12 (c) et du théorème 11.12. (b) découle du théorème 13.12 (d). ■

REMARQUES 13.14 - (a) Gardons les notations du corollaire 13.13 (b). Le sous-groupe $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ est central donc tout caractère linéaire ξ de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ vérifiant $\eta \otimes \xi = \eta$ doit contenir ce sous-groupe dans son noyau. Donc $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \subset \tilde{\mathbf{L}}_\eta^F \subset \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ (comparer avec le corollaire 12.10).

(b) Comme dans la remarque suivant le théorème 13.9, le paramétrage de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$ donné dans le théorème 13.12 (a) est bien défini à tensorisation près par un caractère linéaire de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ (une fois l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{H}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})]$ choisi) donc il est bien défini à conjugaison près par un élément de $\tilde{\mathbf{L}}^F$. Pour fixer précisément ce paramétrage, il faut choisir une composante irréductible de la restriction de \tilde{R}_1 à \mathbf{G}^F et associer à cette composante irréductible le caractère trivial de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$: c'est équivalent à choisir une extension ν_1 de la composante irréductible μ_1 de la restriction de $\tilde{\nu}$ à $N_{\mathbf{G}}^F(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ telle que $\text{Res}_{\mathbf{L}^F}^{N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \mu_1 = \lambda_1$. \square

13.D. Action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Soit $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Notons ξ_z le caractère linéaire du groupe $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ image de z par la suite de morphismes

$$H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F \longrightarrow \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \xrightarrow{\sim} (W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}))^\wedge.$$

Ici, le dernier isomorphisme est le dual de 12.6. On peut voir ξ_z comme un caractère linéaire de $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. La proposition suivante est immédiate.

Proposition 13.15. *Soient $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et $\eta \in \text{Irr } W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$. Alors $\tau_z^{\mathbf{G}} R_\eta = R_{\eta \xi_z}$.*

13.E. Induction de Harish-Chandra. Pour une preuve de l'analogie du théorème suivant pour la série de Harish-Chandra $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda_1)$, voir [HoLe2]. Le théorème ci-dessous en découle facilement.

Théorème 13.16. *Soit \mathbf{M} un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} tel que $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}$. On choisit une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr } W'_{\mathbf{M}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, \mathbf{L}, \lambda) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta^{\mathbf{M}} \end{array}$$

telle que $\langle R_{\mathbf{M} \subset \mathbf{Q}}^{\mathbf{G}} R_1^{\mathbf{M}}, R_1^{\mathbf{G}} \rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0$. Alors

$$\langle R_{\mathbf{M} \subset \mathbf{Q}}^{\mathbf{G}} R_\eta^{\mathbf{M}}, R_\zeta^{\mathbf{G}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \text{Ind}_{W'_{\mathbf{M}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}^{W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \eta, \zeta \rangle_{W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})}$$

pour tous caractères irréductibles η et ζ de $W'_{\mathbf{M}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ et $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ respectivement.

REMARQUE 13.17 - Choisir une bijection

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr } W'_{\mathbf{M}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{M}^F, \mathbf{L}, \lambda) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta^{\mathbf{M}} \end{array}$$

est équivalent à choisir une extension ν'_1 de λ_1 à $N_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ et une racine carrée de q (voir [HoLe2, théorème 4.8] et [BeCu, théorème 2.9]). Si nous demandons à cette bijection de vérifier

$$\langle R_{\mathbf{M} \subset \mathbf{Q}}^{\mathbf{G}} R_1^{\mathbf{M}}, R_1^{\mathbf{G}} \rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0,$$

alors nous devons choisir pour ν'_1 la restriction de ν_1 et, pour la racine carrée de q , la même que celle choisie pour le groupe \mathbf{G}^F . \square

Chapitre V. Autour des caractères de Gelfand-Graev

Le but de ce chapitre est d'étudier les caractères de Gelfand-Graev ainsi que leurs composantes irréductibles, appelés *caractères réguliers*. Dans les groupes à centre non connexe, il peut y avoir plusieurs caractères de Gelfand-Graev (ils sont paramétrés par $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$) et ce ne sont pas forcément des fonctions uniformes, contrairement à ce qui se passe dans les groupes à centre connexe [DeLu1, §10]. Dans la section 14, nous rappelons la définition et les premières propriétés de ces caractères, comme les résultats de Digne, Lehrer et Michel [DiLeMi2] ou l'auteur [Bon7, partie II] sur la restriction de Lusztig. Dans la section 15, nous rappelons comment sont paramétrés les caractères réguliers ou semi-simples (un *caractère semi-simple* est, au signe près, le dual d'Alvis-Curtis d'un caractère régulier). La section 16 est consacrée à l'étude des séries de Harish-Chandra au-dessus d'un caractère semi-simple cuspidal en adaptant l'étude faite au chapitre précédent à ce cas particulier. Dans la dernière section de ce chapitre, nous étudions les combinaisons linéaires d'induits de Lusztig de caractères semi-simples.

14. CARACTÈRES DE GELFAND-GRAEV

14.A. Éléments unipotents réguliers. Si $g \in \mathbf{G}$, alors $\dim C_{\mathbf{G}}(g) \geq \dim \mathbf{T}_0$. Un élément g de \mathbf{G} est dit *régulier* si $\dim C_{\mathbf{G}}(g) = \dim \mathbf{T}_0$. L'ensemble des éléments réguliers de \mathbf{G} forme un ouvert dense de \mathbf{G} (voir [St4, théorème 1.3 (a)]).

Concentrons-nous maintenant sur les éléments unipotents réguliers. Tout d'abord, il existe des éléments unipotents réguliers [St4, théorème 3.1]. Ils sont tous conjugués dans \mathbf{G} [St4, théorème 3.3] : notons $\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$ la classe de conjugaison des éléments unipotents réguliers de \mathbf{G} . Un élément unipotent u de \mathbf{G} est régulier si et seulement si il est contenu dans un seul sous-groupe de Borel [St4, corollaire 3.12 (b)]. Un élément unipotent $u \in \mathbf{U}_0$ est régulier si et seulement si $u \notin \mathbf{U}_I$ pour toute partie non vide I de Δ_0 [St4, lemme 3.2]. Notons $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}$ l'ensemble des éléments unipotents réguliers de \mathbf{U}_0 : c'est un ouvert dense de \mathbf{U}_0 .

Soit $\mathbf{U}_1 = \prod_{\alpha \in \Phi_0^+ - \Delta_0} \mathbf{U}_{\alpha}$, où Φ_0^+ est le système de racines positives de Φ_0 associé à Δ_0 . Alors \mathbf{U}_1 est le groupe dérivé de \mathbf{U}_0 . De plus, l'action de \mathbf{U}_1 par translation (à droite ou à gauche) sur \mathbf{U}_0 stabilise $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}$. Il est de plus clair que $\tilde{\mathbf{T}}_0$ agit transitivement sur $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}/\mathbf{U}_1$. En particulier, $(\mathbf{U}_{0,\text{rég}}/\mathbf{U}_1)^F = \mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F/\mathbf{U}_1^F$ est non vide. D'autre part, le stabilisateur de tout élément de $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}/\mathbf{U}_1$ dans $\tilde{\mathbf{T}}_0$ est $\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})$. Ce dernier étant connexe, on en déduit que $\tilde{\mathbf{T}}_0^F$ agit transitivement sur $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F/\mathbf{U}_1^F$.

Proposition 14.1. *Soit $u \in \mathbf{U}_{0,\text{rég}}$. Alors :*

- (a) $C_{\mathbf{G}}(u) = \mathbf{Z}(\mathbf{G}).C_{\mathbf{U}_0}(u)$.
- (b) Si p est bon pour \mathbf{G} , alors $C_{\mathbf{U}_0}(u)$ est connexe.
- (c) L'application $\mathbf{U}_0 \rightarrow u\mathbf{U}_1$, $x \mapsto xux^{-1}$ est surjective.
- (d) Si u' est un autre élément de $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}$, alors il existe $b \in \mathbf{B}_0$ tel que $u' = bub^{-1}$.
- (e) \mathbf{B}_0 est l'unique sous-groupe de Borel de \mathbf{G} contenant u .

DÉMONSTRATION - (a) découle du fait que le stabilisateur, dans \mathbf{T}_0 , d'un élément de $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}/\mathbf{U}_1$ est égal à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$. Pour (b), voir [SprSt, 3.7]. Montrons maintenant (c). Soit $f : \mathbf{U}_0 \rightarrow u\mathbf{U}_1$, $x \mapsto xux^{-1}$. C'est un morphisme de variété. L'image de f est une orbite sous l'action d'un groupe unipotent, donc c'est une sous-variété fermée de $u\mathbf{U}_1$. De plus, la dimension des fibres de f est toujours égale à

$$\dim C_{\mathbf{U}_0}(u) = \dim C_{\mathbf{G}}(u) - \dim \mathbf{Z}(\mathbf{G}) = |\Delta_0|.$$

Par conséquent, la dimension de l'image de f est

$$\dim \mathbf{U}_0 - \dim C_{\mathbf{U}_0}(u) = |\Phi_0^+| - |\Delta_0| = \dim \mathbf{U}_1.$$

Puisque $u\mathbf{U}_1$ est irréductible, l'image de f est bien $u\mathbf{U}_1$. (d) découle du fait qu'il n'y a qu'une classe de conjugaison d'éléments unipotents réguliers, que chaque élément unipotent régulier est contenu dans un seul sous-groupe de Borel et que le normalisateur de \mathbf{B}_0 dans \mathbf{G} est \mathbf{B}_0 [Bor, théorème 11.16]. (e) est clair. ■

14.B. Caractères réguliers de \mathbf{U}_0^F . Un caractère linéaire $\psi : \mathbf{U}_0^F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}^{\times}$ est dit *régulier* s'il contient \mathbf{U}_1^F dans son noyau et si $\text{Res}_{\mathbf{U}_I^F}^{\mathbf{U}_0^F} \psi \neq 1$ pour toute partie stricte ϕ_0 -stable I de Δ_0 (le lecteur peut

aisément vérifier que cette définition coïncide avec [DiLeMi1, définition 2.3]). Notons $(\mathbf{U}_0^F)_{\text{rég}}^\wedge$ l'ensemble des caractères linéaires réguliers de \mathbf{U}_0^F .

Fixons maintenant et ce jusqu'à la fin de cet article un caractère linéaire non trivial $\chi_1 : \mathbb{F}_p \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. Si n est un entier naturel non nul, nous noterons $\chi_n : \mathbb{F}_{p^n} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$, $x \mapsto \chi_1(\text{Tr}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}(x))$. Avec ces choix, on obtient [DiLeMi2, §2] une application bijective $\tilde{\mathbf{T}}_0^F$ -équivariante $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F/\mathbf{U}_1^F \xrightarrow{\sim} (\mathbf{U}_0^F)_{\text{rég}}^\wedge$. Cela montre que le groupe $\tilde{\mathbf{T}}_0^F$ agit transitivement sur l'ensemble des caractères réguliers de \mathbf{U}_0^F et que le stabilisateur d'un caractère régulier dans $\tilde{\mathbf{T}}_0^F$ est $\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F$. Par conséquent, $\tilde{\mathbf{T}}_0^F/\mathbf{T}_0^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F \simeq H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ agit librement sur l'ensemble des \mathbf{T}_0^F -orbites dans $(\mathbf{U}_0)_{\text{rég}}^\wedge$.

On appelle *caractère de Gelfand-Graev* de \mathbf{G}^F tout caractère de la forme $\text{Ind}_{\mathbf{U}_0^F}^{\mathbf{G}^F} \psi$, où ψ est un caractère régulier de \mathbf{U}_0^F . Notons $\text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F)$ l'ensemble des classes de \mathbf{G}^F -conjugaison d'éléments unipotents réguliers de \mathbf{G}^F et $\text{GG}(\mathbf{G}^F)$ l'ensemble des caractères de Gelfand-Graev de \mathbf{G}^F . La dernière remarque du précédent paragraphe montre que $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ agit transitivement sur $\text{GG}(\mathbf{G}^F)$ (en particulier, il n'y a qu'un caractère de Gelfand-Graev dans $\tilde{\mathbf{G}}^F$).

Si $[u] \in \text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F)$, alors $[u] \cap \mathbf{U}_0^F$ est contenu dans $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F$ et son image dans $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F/\mathbf{U}_1^F$ est une \mathbf{T}_0^F -orbite. On peut donc lui associer un caractère de Gelfand-Graev $\Gamma_u^{\mathbf{G}}$: l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F) & \longrightarrow & \text{GG}(\mathbf{G}^F) \\ [u] & \longmapsto & \Gamma_u^{\mathbf{G}} \end{array}$$

est surjective et $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ -équivariante. Nous verrons plus tard qu'elle est bijective.

Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous fixons un élément unipotent régulier $u \in \mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F$, nous notons ψ le caractère régulier de \mathbf{U}_0^F associé et nous posons

$$\Gamma^{\mathbf{G}} = \text{Ind}_{\mathbf{U}_0^F}^{\mathbf{G}^F} \psi.$$

Une fois fixé ψ , l'ensemble des \mathbf{T}_0^F -orbites de caractères réguliers de \mathbf{U}_0^F est en bijection naturelle avec $\tilde{\mathbf{T}}_0^F/\mathbf{T}_0^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F \simeq H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Soient $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et $\tilde{t}_z \in \tilde{\mathbf{T}}_0^F$ tels que $\sigma_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{G}}(\tilde{t}_z \mathbf{T}_0^F \cdot \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{G}})^F) = z$. Posons $\psi_z = \psi \circ (\text{ad } \tilde{t}_z)^{-1}$. Alors $\{\psi_z \mid z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))\}$ est un ensemble de représentants des \mathbf{T}_0^F -orbites de caractères linéaires réguliers de \mathbf{U}_0^F . On définit alors

$$(14.2) \quad \Gamma_z^{\mathbf{G}} = \text{Ind}_{\mathbf{U}_0^F}^{\mathbf{G}^F} \psi_z.$$

Remarquons que $\Gamma_z^{\mathbf{G}}$ ne dépend que de z et que

$$(14.3) \quad \Gamma_z^{\mathbf{G}} = \Gamma^{\mathbf{G}} \circ (\text{ad } \tilde{t}_z)^{-1} = \tau_z^{\mathbf{G}} \Gamma^{\mathbf{G}}.$$

Donc les caractères de Gelfand-Graev de \mathbf{G}^F sont les $\Gamma_z^{\mathbf{G}}$ où z parcourt $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$.

14.C. Restriction de Harish-Chandra. Le théorème suivant a été montré par Digne, Lehrer et Michel [DiLeMi1, théorème 2.9] (voir aussi [As, preuve du lemme 3.6.1] pour un énoncé moins fort).

Théorème 14.4 (Digne-Lehrer-Michel). *Soit \mathbf{P} un sous-groupe parabolique F -stable de \mathbf{G} et soit \mathbf{L} un complément de Levi F -stable de \mathbf{P} . Alors $*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \Gamma^{\mathbf{G}}$ est un caractère de Gelfand-Graev de \mathbf{L}^F . Plus précisément, si $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{P}$ et $\mathbf{T}_0 \subset \mathbf{L}$, alors la restriction de ψ à $\mathbf{U}_0^F \cap \mathbf{L}^F$ est un caractère régulier de $\mathbf{U}_0^F \cap \mathbf{L}^F$ et*

$$*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \Gamma^{\mathbf{G}} = \text{Ind}_{\mathbf{U}_0^F \cap \mathbf{L}^F}^{\mathbf{L}^F} (\text{Res}_{\mathbf{U}_0^F \cap \mathbf{L}^F}^{\mathbf{U}_0^F} \psi).$$

NOTATION - Sous les hypothèses et notations du théorème 14.4, on pose

$$(14.5) \quad \Gamma^{\mathbf{L}} = *R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \Gamma^{\mathbf{G}}.$$

Remarquons que $\Gamma^{\mathbf{L}}$ ne dépend pas de \mathbf{P} . Si on pose $\Gamma_z^{\mathbf{L}} = \tau_z^{\mathbf{L}} \Gamma^{\mathbf{L}}$ pour tout $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{L}))$, alors, d'après 10.4, on a

$$(14.6) \quad \Gamma_{h_1^{\mathbf{L}}(z)}^{\mathbf{L}} = *R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \Gamma_z^{\mathbf{G}}$$

pour tout $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. \square

14.D. Dualité d'Alvis-Curtis. Les résultats de cette section sont dûs eux aussi à Digne, Lehrer et Michel.

Théorème 14.7 (Digne-Lehrer-Michel).

- (a) Si $g \in \mathbf{G}^F$ est tel que $D_{\mathbf{G}}\Gamma^{\mathbf{G}}(g) \neq 0$, alors g est un élément unipotent régulier.
- (b) Si z et z' sont deux éléments de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, alors

$$\langle D_{\mathbf{G}}\Gamma_z^{\mathbf{G}}, \Gamma_{z'}^{\mathbf{G}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \eta_{\mathbf{G}} |\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F| \delta_{z, z'}.$$

DÉMONSTRATION - voir [DiLeMi1, théorème 2.12 (i) et (ii)]. ■

Corollaire 14.8 (Digne-Lehrer-Michel). La famille $(\Gamma_z^{\mathbf{G}})_{z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))}$ est libre. En particulier, si z et z' sont deux éléments distincts de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, alors $\Gamma_z^{\mathbf{G}} \neq \Gamma_{z'}^{\mathbf{G}}$.

14.E. Restriction de Lusztig. Nous fixons dans cette sous-section un sous-groupe de Levi F -stable \mathbf{L} de \mathbf{G} .

Hypothèse : Nous supposons dans cette sous-section, et seulement dans cette sous-section, que p est un bon nombre premier pour \mathbf{G} .

Dans [Bon3, §2], l'auteur a défini une application

$$\text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : \text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F) \longrightarrow \text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{L}^F).$$

Rappelons sa définition (pour la preuve des faits utilisés dans la discussion suivante, nous nous référons à [Bon3]).

Tout d'abord, si \mathbf{L} est un complément de Levi F -stable d'un sous-groupe parabolique F -stable \mathbf{P} de \mathbf{G} , notons $\pi_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{L}$ la projection canonique et posons

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : \text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F) &\longrightarrow \text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{L}^F) \\ [g]_{\mathbf{G}^F} &\longmapsto \pi_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}([g]_{\mathbf{P}}^F \cap \mathbf{P}). \end{aligned}$$

Il est bien connu que $\rho_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ est bien définie et ne dépend pas du choix du sous-groupe parabolique F -stable ayant \mathbf{L} comme sous-groupe de Levi [DiLeMi1, proposition 5.3].

Revenons au cas général. Soit \mathbf{L}_1 un sous-groupe de Levi F -stable \mathbf{L} -déployé de \mathbf{L} minimal tel que l'application $h_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}}$ soit un isomorphisme. Le groupe \mathbf{L}_1 étant cuspidal, il existe alors un sous-groupe de Levi F -stable \mathbf{G} -déployé \mathbf{L}_2 qui lui est géométriquement conjugué. Alors l'application

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{L}} : \text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{L}_2^F) &\longrightarrow \text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{L}_1^F) \\ [l]_{\mathbf{L}_2^F} &\longmapsto [l]_{\mathbf{G}^F} \cap \mathbf{L}_1^F \end{aligned}$$

est bien définie et bijective. De plus, $\rho_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}}$ est elle aussi bijective. On pose alors, comme dans [Bon3, page 279],

$$\text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = (\rho_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}})^{-1} \circ c_{\mathbf{L}} \circ \rho_{\mathbf{L}_2}^{\mathbf{G}}.$$

Nous allons maintenant définir une autre application $\text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F) \rightarrow \text{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{L}^F)$. Notons x un élément de \mathbf{G} tel que $\mathbf{L}_1 = {}^g\mathbf{L}_2$. Puisque \mathbf{L}_1 et \mathbf{L}_2 sont F -stables, $F(g)g^{-1}$ appartient à $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_1)$. Notons $w_{\mathbf{L}}$ sa classe dans $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_1)$. Nous noterons ici $\varphi_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}} : W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_1) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{L}_1)$ le morphisme de groupes noté $\varphi_{\mathbf{L}_1, v_1}^{\mathbf{G}}$ dans [Bon7, partie I, corollaire 3.8], où v_1 est un élément unipotent régulier de \mathbf{L}_1 . Il est à noter que ce morphisme a été calculé explicitement dans [Bon7, partie II, table 1]. Identifions $\mathcal{Z}(\mathbf{L}_1)$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ via $h_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}}$ et notons $z_{\mathbf{L}}$ l'image dans $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{L}))$ de l'élément $\varphi_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}}(w_{\mathbf{L}})$ de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$. On pose alors

$$\text{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \tau_{z_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}} \circ \text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}.$$

Nous rappelons les propriétés des applications $\text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et $\text{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.

Proposition 14.9. On a :

- (a) Les applications $\text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et $\text{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ ne dépendent pas des choix de \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 et g effectués ci-dessus.
- (b) Si $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, alors $\text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ \tau_z^{\mathbf{G}} = \tau_{h_{\mathbf{L}}(z)}^{\mathbf{L}} \circ \text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et $\text{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ \tau_z^{\mathbf{G}} = \tau_{h_{\mathbf{L}}(z)}^{\mathbf{L}} \circ \text{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.
- (c) Les applications $\text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et $\text{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ sont surjectives.
- (d) Si \mathbf{M} est un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{L} , alors $\text{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \text{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ \text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et $\text{dlm}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \text{dlm}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ \text{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.

DÉMONSTRATION - Les assertions (a), (b) et (c) sont évidentes. Le fait que $\text{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \text{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ \text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ est démontré dans [Bon6, proposition 7.5 (c)]. Il suffit alors d'appliquer [Bon7, partie II, corollaire 12.4] pour obtenir que $\text{dlm}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \text{dlm}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ \text{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$. ■

NOTATION - Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous noterons, lorsque p est bon pour \mathbf{G} , $u_{\mathbf{L}}$ un représentant de la classe de \mathbf{L}^F -conjugaison $\text{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}[u]_{\mathbf{G}^F}$. D'autre part, nous noterons $\Gamma^{\mathbf{L}}$ le caractère de Gelfand-Graev de \mathbf{L}^F associé à $[u_{\mathbf{L}}]_{\mathbf{L}^F}$. □

La conjecture suivante propose une généralisation du théorème de Digne-Lehrer-Michel sur la restriction de Harish-Chandra d'un caractère de Gelfand-Graev.

Conjecture \mathfrak{G} : Si \mathbf{L} est un complément de Levi F -stable d'un sous-groupe parabolique \mathbf{P} de \mathbf{G} , alors ${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \Gamma^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{L}} \Gamma^{\mathbf{L}}$.

Conjecture \mathfrak{G}' : Si \mathbf{L} est un complément de Levi F -stable d'un sous-groupe parabolique \mathbf{P} de \mathbf{G} , alors ${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \gamma_u^{\mathbf{G}} = \gamma_{u_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}$.

Nous dirons que “la conjecture \mathfrak{G} (resp. \mathfrak{G}') a lieu dans \mathbf{G} ” si, pour tout sous-groupe de Levi \mathbf{M} de \mathbf{G} , pour tout sous-groupe parabolique \mathbf{P} de \mathbf{M} et pour tout complément de Levi F -stable \mathbf{L} de \mathbf{P} , on a ${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{M}} \Gamma^{\mathbf{M}} = \varepsilon_{\mathbf{M}} \varepsilon_{\mathbf{L}} \Gamma^{\mathbf{L}}$ (resp. ${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{M}} \gamma_{u_{\mathbf{M}}}^{\mathbf{M}} = \gamma_{u_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}$).

Proposition 14.10. Si la formule de Mackey a lieu dans \mathbf{G} , alors la conjecture \mathfrak{G} a lieu dans \mathbf{G} si et seulement si la conjecture \mathfrak{G}' a lieu dans \mathbf{G} .

DÉMONSTRATION - Cela résulte facilement de [DiLeMi2, propositions 2.1 et 2.5]. ■

Lorsque le centre de \mathbf{G} est connexe, ces conjectures ont été montrées par Digne-Lehrer-Michel [DiLeMi1, proposition 5.4] : en effet, dans ce cas, les fonctions centrales $\Gamma^{\mathbf{G}}$ et $\gamma_u^{\mathbf{G}}$ sont des combinaisons linéaires explicites de caractères de Deligne-Lusztig $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$, où $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F)$. Il suffit alors de calculer ${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$: cela se fait en utilisant la formule de Mackey qui est valable dans ce cas (voir théorème 10.12 (a2)).

Lorsque le centre de \mathbf{G} n'est pas connexe, ces conjectures ne sont démontrées qu'en utilisant la théorie des faisceaux-caractères, ce qui restreint leur domaine de validité (notamment à cause de l'emploi de [Lu8, théorème 1.14]).

Théorème 14.11. Si p est bon pour \mathbf{G} , si F est un \mathbb{F}_q -endomorphisme de Frobenius de \mathbf{G} et si $q > q_0(\mathbf{G})$, où $q_0(\mathbf{G})$ est une constante ne dépendant que de la donnée radicielle associée à \mathbf{G} , alors les conjectures \mathfrak{G} et \mathfrak{G}' ont lieu dans \mathbf{G} .

REMARQUE - Dans [DiLeMi2, théorème 3.7], Digne-Lehrer-Michel ont montré que ${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \Gamma^{\mathbf{G}}$ est égal, au signe $\varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{L}}$ près, à un caractère de Gelfand-Graev de \mathbf{L}^F . En revanche, ils n'ont pas déterminé lequel. En étudiant plus précisément l'algèbre d'endomorphismes de l'induit d'un faisceau-caractère cuspidal supporté par la classe unipotente régulière [Bon7] et en intégrant cette information supplémentaire dans la preuve de Digne-Lehrer-Michel, nous avons obtenu le théorème ci-dessus [Bon7, partie II, théorème 15.2]. □

15. CARACTÈRES RÉGULIERS ET CARACTÈRES SEMI-SIMPLES

Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous fixons un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$. Nous fixons aussi un élément semi-simple $\tilde{s} \in \tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\tilde{s}) = s$ et nous posons $s' = i'^*(\tilde{s}) \in \mathbf{G}'^{*F^*}$.

Nous reprenons les notations introduites dans la section 8 (\mathbf{T}_1^* , \mathbf{B}_1^* , Φ_s , $\phi_1 \dots$). Pour tout $w \in W^\circ(s)$, nous choisissons un tore maximal F^* -stable \mathbf{T}_w^* de $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ de type w par rapport à \mathbf{T}_1^* . Notons $\varepsilon : W \rightarrow \{1, -1\}$ le caractère signature de W . Nous noterons ε_s (respectivement ε_s°) sa restriction à $W(s)$ (respectivement $W^\circ(s)$). Alors, si $w \in W^\circ(s)$, on a $\varepsilon_{\mathbf{T}_w^*} = \varepsilon(w)\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)}$ et donc, d'après le corollaire 10.13,

$$(15.1) \quad D_{\mathbf{G}} R_{\mathbf{T}_w^*}^{\mathbf{G}}(s) = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)} \varepsilon(w) R_{\mathbf{T}_w^*}^{\mathbf{G}}(s).$$

REMARQUE 15.2 - Il se peut que la restriction du caractère signature à $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ soit non triviale, comme le montre le cas où $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_2(\mathbb{F})$, $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ est un endomorphisme de Frobenius déployé et s est l'unique élément d'ordre 2 de \mathbf{T}_0^* . \square

Soient $\tilde{\mathbf{T}}_1^* = i^{*-1}(\mathbf{T}_1^*)$. Alors W est canoniquement isomorphe au groupe de Weyl de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ relativement à $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$ et, puisque $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ est connexe (voir théorème 3.5), on a $W(\tilde{s}) = W^\circ(\tilde{s})$ et $A_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s}) = \{1\}$. De plus, $W(\tilde{s}) = W^\circ(s)$ car $W^\circ(s)$ est le groupe de Weyl du système de racines Φ_s . Pour tout $w \in W(\tilde{s})$, on pose $\tilde{\mathbf{T}}_w^* = i^{*-1}(\mathbf{T}_w^*)$. D'après la proposition 10.11 (a), on a, pour tout $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$,

$$(15.3) \quad R_{\tilde{\mathbf{T}}_w^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) \otimes \widehat{\varphi_s(a)} = R_{\tilde{\mathbf{T}}_{a^{-1}wa}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})$$

car $\tilde{s}\varphi_s(a) = a\tilde{s}a^{-1}$. En particulier,

$$(15.4) \quad R_{\tilde{\mathbf{T}}_{a^{-1}wa}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) = R_{\tilde{\mathbf{T}}_w^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}).$$

D'après la formule de Mackey (théorème 10.12 (2)), on a, pour tous $w, w' \in W^\circ(s)$,

$$(15.5) \quad \langle R_{\tilde{\mathbf{T}}_w^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}), R_{\tilde{\mathbf{T}}_{w'}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) \rangle_{\mathbf{G}^F} = \begin{cases} |C_{W(s)}(w\phi_1)| & \text{si } w\phi_1 \text{ et } w'\phi_1 \text{ sont conjugués sous } W(s), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

15.A. Définition. Un caractère irréductible de \mathbf{G}^F est dit *régulier* (respectivement *semi-simple*) s'il est une composante irréductible d'un caractère de Gelfand-Graev de \mathbf{G}^F (respectivement du dual d'Alvis-Curtis d'un caractère de Gelfand-Graev de \mathbf{G}^F). Nous allons dans cette section paramétrer les caractères réguliers (et semi-simples) de \mathbf{G}^F appartenant à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$ ou $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$. Nous allons aussi établir les premières propriétés (action de $\tilde{\mathbf{G}}^F$, restriction de Harish-Chandra...).

Posons

$$(15.6) \quad \begin{aligned} \rho_s = \rho_s^{\mathbf{G}} &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)}}{|W^\circ(s)|} \sum_{w \in W^\circ(s)} R_{\mathbf{T}_w^*}^{\mathbf{G}}(s), \\ \chi_s = \chi_s^{\mathbf{G}} &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)}}{|W^\circ(s)|} \sum_{w \in W^\circ(s)} \varepsilon(w) R_{\mathbf{T}_w^*}^{\mathbf{G}}(s). \end{aligned}$$

Remarquons que, d'après 15.1,

$$(15.7) \quad \chi_s = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)} D_{\mathbf{G}}(\rho_s).$$

Alors, d'après le corollaire 11.5, on a

$$(15.8) \quad \begin{aligned} \rho_s &= \text{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\mathbf{G}^F} \rho_{\tilde{s}}, \\ \chi_s &= \text{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\mathbf{G}^F} \chi_{\tilde{s}}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 10.11, on a

$$(15.9) \quad \begin{aligned} \rho_{\tilde{s}} \otimes \hat{z} &= \rho_{\tilde{s}z}, \\ \chi_{\tilde{s}} \otimes \hat{z} &= \chi_{\tilde{s}z}, \end{aligned}$$

pour tout $z \in (\text{Ker } i^*)^{F^*}$.

Théorème 15.10 (Deligne-Lusztig).

$$(a) \quad \langle \chi_{\tilde{s}}, \Gamma_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}} \rangle = 1.$$

- (b) $\rho_{\tilde{s}}$ et $\chi_{\tilde{s}}$ sont des caractères irréductibles de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ et ils appartiennent à $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$.
(c) Le caractère de Gelfand-Graev de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ a la décomposition suivante :

$$\Gamma^{\tilde{\mathbf{G}}} = \sum_{[\tilde{s}]} \chi_{\tilde{s}}.$$

REMARQUE - Le théorème précédent est démontré dans [DeLu1, théorème 10.7] lorsque F est un endomorphisme de Frobenius. Dans le contexte légèrement plus général dans lequel nous nous plaçons, le résultat reste valide. En effet, d'après [DeLu1, page 161], il faut seulement utiliser le fait que la formule de Mackey a lieu lorsque l'un des deux sous-groupes de Levi est un tore (voir théorème 10.12 (a2)). \square

Corollaire 15.11 (Asai).

- (a) $\langle \chi_s, \Gamma^{\mathbf{G}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1$.
(b) ρ_s et χ_s sont des caractères de \mathbf{G}^F sans multiplicité et toute composante irréductible de ρ_s ou χ_s appartient à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.
(c) Si $\chi_{s,1}$ est l'unique composante irréductible commune à $\Gamma^{\mathbf{G}}$ et χ_s (voir (a)), alors

$$\Gamma^{\mathbf{G}} = \sum_{[s]} \chi_{s,1}.$$

DÉMONSTRATION - (a) résulte du théorème 15.10 (a), de 15.8 et de la réciprocité de Frobenius. (b) résulte du théorème 15.10 (b), de (a), de 15.8 et de la proposition 11.7 (a). (c) découle de (b) et du théorème 15.10 (c). \blacksquare

On pose $\rho_{s,1} = \varepsilon_{\mathbf{G} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)}} D_{\mathbf{G}}(\chi_{s,1}) \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. C'est une composante irréductible de ρ_s . S'il y a ambiguïté, on notera $\rho_{s,1}^{\mathbf{G}}$ et $\chi_{s,1}^{\mathbf{G}}$ les caractères irréductibles $\rho_{s,1}$ et $\chi_{s,1}$ de \mathbf{G}^F respectivement.

Corollaire 15.12 (Digne-Lehrer-Michel). Soit \mathbf{L} un complément de Levi F -stable d'un sous-groupe parabolique F -stable \mathbf{P} de \mathbf{G} . Notons \mathbf{L}^* un complément de Levi F^* -stable d'un sous-groupe parabolique F^* -stable de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{L} . Alors

$${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \rho_{s,1}^{\mathbf{G}} = \sum_{[t]_{\mathbf{L}^* F^*} \subset [s]_{\mathbf{G}^* F^*}} \rho_{t,1}^{\mathbf{L}}$$

et

$${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \chi_{s,1}^{\mathbf{G}} = \sum_{[t]_{\mathbf{L}^* F^*} \subset [s]_{\mathbf{G}^* F^*}} \chi_{t,1}^{\mathbf{L}}.$$

DÉMONSTRATION - La deuxième égalité résulte du théorème 14.4, du corollaire 15.11 (c), et du corollaire 11.11. La première découle de la seconde et de la relation de commutation entre l'induction de Harish-Chandra et la dualité d'Alvis-Curtis [DiMi2, théorème 8.11]. \blacksquare

Si $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, on pose

$$\rho_{s,\xi} = \tau_z^{\mathbf{G}} \rho_{s,1}$$

et

$$\chi_{s,\xi} = \tau_z^{\mathbf{G}} \chi_{s,1},$$

où $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ est tel que $\hat{\omega}_s^0(z) = \xi$ (d'après le corollaire 11.13, les caractères $\chi_{s,\xi}$ et $\rho_{s,\xi}$ ne dépendent que de ξ et non du choix de z). La proposition suivante décrit les caractères réguliers ou semi-simples appartenant à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.

Proposition 15.13 (Asai). Le stabilisateur de $\rho_{s,1}$ (ou $\chi_{s,1}$) dans $\tilde{\mathbf{G}}^F$ est égal à $\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$. Par conséquent,

$$\rho_s = \sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge} \rho_{s,\xi}$$

et

$$\chi_s = \sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge} \chi_{s,\xi}.$$

DÉMONSTRATION - Seule la première assertion nécessite une preuve, la deuxième résultant immédiatement de la première et du corollaire 15.11 (b). Mais, par la théorie de Clifford, elle découle de la formule 15.3. ■

Corollaire 15.14.

(a) Si $z \in H^1(F, \mathbf{Z}(\mathbf{G}))$ et si $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, alors

$$\tau_z^{\mathbf{G}} \rho_{s,\xi} = \rho_{s,\xi \hat{\omega}_s^0(z)}$$

et

$$\tau_z^{\mathbf{G}} \chi_{s,\xi} = \chi_{s,\xi \hat{\omega}_s^0(z)}.$$

(b) $\chi_{s,\xi}$ est une composante irréductible de $\Gamma_z^{\mathbf{G}}$ si et seulement si $\xi = \hat{\omega}_s^0(z)$.

S'il y a ambiguïté, nous noterons $\rho_{s,\xi}^{\mathbf{G}}$ et $\chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}}$ les caractères irréductibles $\rho_{s,\xi}$ et $\chi_{s,\xi}$ de \mathbf{G}^F respectivement ($\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$).

Corollaire 15.15 (Digne-Lehrer-Michel). Soit \mathbf{L} un complément de Levi F -stable d'un sous-groupe parabolique F -stable \mathbf{P} de \mathbf{G} . Soit \mathbf{L}^* un complément de Levi F^* -stable d'un sous-groupe parabolique F^* -stable de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{L} . Soit $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Pour tout $t \in \mathbf{L}^{*F^*}$ tel qu'il existe $g \in \mathbf{G}^{*F^*}$ vérifiant $g_s = t$, on pose $\xi_t = \text{Res}_{A_{\mathbf{L}^*}(t)^{F^*}}^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} g\xi$; le caractère linéaire ξ_t ne dépend pas du choix de g . Alors

$${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \rho_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \sum_{[t]_{\mathbf{L}^{*F^*}} \subset [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}} \rho_{t,\xi_t}^{\mathbf{L}}$$

et

$${}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \sum_{[t]_{\mathbf{L}^{*F^*}} \subset [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}} \chi_{t,\xi_t}^{\mathbf{L}}.$$

DÉMONSTRATION - Cela résulte du corollaire 15.12, de la commutativité du diagramme 8.6 et de 10.5. ■

Proposition 15.16. On a $\rho_s = \chi_s$ si et seulement si $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ est un tore maximal de \mathbf{G}^* . Dans ce cas, il existe un caractère linéaire ξ_s d'ordre 2 de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ tel que, pour tout $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, on ait

$$D_{\mathbf{G}} \rho_{s,\xi} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)} \rho_{s,\xi \xi_s}.$$

DÉMONSTRATION - La première assertion est immédiate. Supposons donc que $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ est un tore maximal de \mathbf{G}^* . Notons ξ_s le caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ tel que

$$D_{\mathbf{G}} \rho_{s,1} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)} \rho_{s,\xi_s}.$$

Puisque $\tau_z^{\mathbf{G}} \circ D_{\mathbf{G}} = D_{\mathbf{G}} \circ \tau_z^{\mathbf{G}}$ pour tout $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, on en déduit la formule donnée dans la proposition 15.16. Pour finir, puisque $D_{\mathbf{G}}$ est une involution, on a $\xi_s^2 = 1$. ■

EXEMPLE 15.17 - Le caractère linéaire ξ_s de la proposition 15.16 peut être non trivial. En effet, supposons ici que $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_2(\mathbb{F})$, que F est l'endomorphisme de Frobenius déployé standard sur \mathbb{F}_q et que p (ou q) est impair. Notons s l'unique élément de \mathbf{T}_0^* d'ordre 2 et notons θ l'unique caractère linéaire de \mathbf{T}_0^* d'ordre 2. Alors $\rho_s = R_{\mathbf{T}_0^*}^{\mathbf{G}}(\theta)$ et ${}^*R_{\mathbf{T}_0^*}^{\mathbf{G}}(\rho_{s,1}) = \theta$ d'après le corollaire 15.12. D'autre part, $D_{\mathbf{G}} = (R_{\mathbf{T}_0^*}^{\mathbf{G}} \circ {}^*R_{\mathbf{T}_0^*}^{\mathbf{G}}) - \text{Id}_{\mathbb{Z}\text{-Tr } \mathbf{G}^F}$. Donc $D_{\mathbf{G}}(\rho_{s,1}) = \rho_{s,\xi}$, où ξ est l'unique caractère non trivial de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

16. CARACTÈRES SEMI-SIMPLES OU RÉGULIERS CUSPIDAUX

Nous allons ici étudier les séries de Harish-Chandra associées à un caractère cuspidal semi-simple (ou régulier).

16.A. Caractérisation de la cuspidalité. Soit $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Si $\rho_{s,\xi}$ est cuspidal, alors $D_{\mathbf{G}}\rho_{s,\xi} = \eta_{\mathbf{G}}\rho_{s,\xi}$ et donc $D_{\mathbf{G}}\rho_s = \eta_{\mathbf{G}}\rho_s$. En particulier, $\rho_s = \chi_s$. Donc un caractère irréductible cuspidal est semi-simple si et seulement si il est régulier. Dorénavant, nous fixons un couple $(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1) \in \nabla(\tilde{\mathbf{G}}, F)$ tel que $(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1) \xleftarrow{\tilde{\mathbf{G}}} (\tilde{\mathbf{T}}_1^*, \tilde{s})$ et nous posons $(\mathbf{T}_1, \theta_1) = \mathfrak{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1)$. Le lemme suivant précise quand est-ce qu'un caractère semi-simple est cuspidal.

Lemme 16.1. *Soit $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Le caractère irréductible $\rho_{s,\xi}$ de \mathbf{G}^F est cuspidal si et seulement si $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ est un tore maximal F^* -stable de \mathbf{G}^* qui n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi F^* -stable \mathbf{G}^* -déployé.*

DÉMONSTRATION - Remarquons que, d'après le corollaire 12.1, $\rho_{s,\xi}$ est cuspidal si et seulement si le caractère irréductible $\rho_{\tilde{s}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ l'est. Il est donc suffisant de montrer le théorème pour $\tilde{\mathbf{G}}$.

Si $\rho_{\tilde{s}}$ est cuspidal, alors $D_{\tilde{\mathbf{G}}}\rho_{\tilde{s}} = \eta_{\tilde{\mathbf{G}}}\rho_{\tilde{s}}$ donc $\rho_{\tilde{s}} = \chi_{\tilde{s}}$. Cela montre que $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ est un tore maximal de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ donc que $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s}) = \tilde{\mathbf{T}}_1^*$. Dans ce cas,

$$\rho_{\tilde{s}} = \varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{T}}_1^*}R_{\tilde{\mathbf{T}}_1^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})$$

donc $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ n'est contenu dans aucun complément de Levi F^* -stable d'un sous-groupe parabolique F^* -stable propre de $\tilde{\mathbf{G}}^*$.

Réciproquement, supposons que $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ soit un tore maximal F^* -stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ qui n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi F^* -stable \mathbf{G}^* -déployé. Alors $\rho_{\tilde{s}} = \varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{T}}_1}R_{\tilde{\mathbf{T}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\theta}_1)$. Soit $\tilde{\mathbf{L}}$ un complément de Levi F -stable d'un sous-groupe parabolique F -stable propre $\tilde{\mathbf{P}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ et soit $\tilde{\mathbf{L}}^*$ un complément de Levi F^* -stable d'un sous-groupe parabolique F^* -stable propre de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ dual de $\tilde{\mathbf{L}}$. Alors, d'après la formule de Mackey (voir théorème 10.12 (a2)), on a

$${}^*R_{\tilde{\mathbf{L}} \subset \tilde{\mathbf{P}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} R_{\tilde{\mathbf{T}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\theta}_1) = 0,$$

ce qui montre la cuspidalité de $\rho_{\tilde{s}}$. ■

16.B. Groupe d'inertie. Notons $\tilde{\mathbf{L}}_s$ (respectivement $\tilde{\mathbf{L}}_s^*$) le sous-groupe de Levi F -stable (respectivement F^* -stable) $\tilde{\mathbf{G}}$ -déployé (respectivement $\tilde{\mathbf{G}}^*$ -déployé) contenant $\tilde{\mathbf{T}}_1$ (respectivement $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$) et minimal pour ces propriétés (voir remarque 2.4). Alors, $\tilde{\mathbf{L}}_s$ et $\tilde{\mathbf{L}}_s^*$ sont duaux. On pose $\mathbf{L}_s = \tilde{\mathbf{L}}_s \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{L}_s^* = i^*(\tilde{\mathbf{L}}_s^*)$. Soit $\tilde{\mathbf{P}}_s$ un sous-groupe parabolique F -stable de $\tilde{\mathbf{G}}$ dont $\tilde{\mathbf{L}}_s$ soit un complément de Levi. On pose $\mathbf{P}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s \cap \mathbf{G}$. En appliquant le corollaire 2.3 au groupe $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$, on obtient que $C_{\tilde{\mathbf{L}}_s^*}(\tilde{s}) = \tilde{\mathbf{T}}_1^*$. Donc, d'après le lemme 16.1, $\rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s}$ est un caractère irréductible cuspidal de $\tilde{\mathbf{L}}_s^F$. Donc, d'après le corollaire 12.1, les caractères irréductibles $\rho_{s,\xi}^{\mathbf{L}_s}$ de \mathbf{L}_s^F sont cuspidaux pour tout $\xi \in (A_{\mathbf{L}_s^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Le groupe W^{ϕ_1} stabilise $\text{Ker}(F^* - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}_1^*) \otimes \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ donc il normalise \mathbf{L}^* . On a en fait le résultat plus précis suivant :

Proposition 16.2. *Le groupe $W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s})$ est canoniquement isomorphe à $W(s)^{F^*}$.*

DÉMONSTRATION - On a

$$\rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s} = \pm R_{\tilde{\mathbf{T}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\theta}_1).$$

Le groupe $W(s)^{F^*}$ est isomorphe à $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et le groupe $W(\tilde{s})^{F^*}$ est isomorphe à $W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1)$. De plus, puisque $C_{\tilde{\mathbf{L}}_s^*}(\tilde{s}) = \tilde{\mathbf{T}}_1^*$, on a $W_{\mathbf{L}_s^F}(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1) = \{1\}$.

Le groupe $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ normalise \mathbf{L}_s . Soit $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$. Notons τ_w le caractère linéaire $w\tilde{\theta}_1.\tilde{\theta}_1^{-1}$ de $\tilde{\mathbf{T}}_1^F/\mathbf{T}_1^F \simeq \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F$. Alors

$${}^w\rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s} = \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s} \otimes \tau_w.$$

Donc, si on note \bar{w} l'image de w dans $W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}})$, alors l'application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1) & \longrightarrow & W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s}) \\ w & \longmapsto & (\bar{w}, \tau_w) \end{array}$$

est un morphisme de groupes bien défini.

Montrons d'abord que α est injective. Soit $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ tel que $\alpha(w) = 1$. Alors $\tau_w = 1$ donc $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1)$. Mais $\bar{w} = 1$ donc $w \in W_{\mathbf{L}_s^F}(\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\theta}_1)$ c'est-à-dire $w = 1$.

Il reste à montrer que α est surjective. Soit $(w, \tau) \in W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s})$. Notons \dot{w} un représentant de w dans $N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}_s)$. On a

$$R_{\dot{w}\tilde{\mathbf{T}}_1}^{\tilde{\mathbf{L}}_s}(\dot{w}\tilde{\theta}_1) = R_{\tilde{\mathbf{T}}_1}^{\tilde{\mathbf{L}}_s}(\tilde{\theta}_1 \otimes \tau)$$

donc il résulte de la formule de Mackey (théorème 10.12 (2)) qu'il existe $l \in \mathbf{L}^F$ tel que $(\dot{w}\tilde{\mathbf{T}}_1, \dot{w}\tilde{\theta}_1) = ({}^l\tilde{\mathbf{T}}_1, {}^l(\tilde{\theta}_1 \otimes \tau))$. Soit $\dot{w}_+ = l^{-1}\dot{w}$. Alors $\dot{w}_+ \in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et, si on note w_+ son image dans $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$, alors $\alpha(w_+) = (w, \tau)$. ■

Soit $W_{\mathbf{L}_s}(s)$ le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{L}_s^*}(s)$ relativement à \mathbf{T}_1^* . On a $W_{\mathbf{L}_s}(s) = A_{\mathbf{L}_s^*}(s)$ car $C_{\mathbf{L}_s^*}^\circ(s) = i^*(C_{\tilde{\mathbf{L}}_s^*}(\tilde{s})) = \mathbf{T}_1^*$. Donc $A_{\mathbf{L}_s^*}(s)$ est un sous-groupe F^* -stable de $W(s)$.

Proposition 16.3.

- (a) $A_{\mathbf{L}_s^*}(s)^{F^*}$ est contenu dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$.
- (b) $A_{\mathbf{L}_s^*}(s)^{F^*}$ est central dans $W(s)^{F^*}$.
- (c) $\tilde{\mathbf{G}}^F(s) = \mathbf{G}^F \cdot \tilde{\mathbf{L}}_s^F(\mathbf{G}, \rho_{s,1}^{\mathbf{L}_s})$.
- (d) $\rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, \tilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s})$.

DÉMONSTRATION - (a) découle de la proposition 8.7 (b). (b) résulte du fait que $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est abélien, de (a) et de la proposition 8.7 (c). (c) résulte de la proposition 16.2. (d) découle de l'égalité

$$\langle R_{\tilde{\mathbf{L}}_s \subset \tilde{\mathbf{P}}_s}^{\tilde{\mathbf{G}}} \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s}, \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1,$$

qui a été montrée dans le corollaire 15.12. ■

REMARQUE 16.4 - Le sous-groupe $A_{\mathbf{L}_s^*}(s)^{F^*}$ de $W(s)^{F^*} \simeq W'_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s})$ est isomorphe au sous-groupe central $(\tilde{\mathbf{L}}^F / \tilde{\mathbf{L}}^F(\rho_{\tilde{s}}))^{\wedge}$ défini dans le §12.D. □

16.C. La série $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s})$. D'après le théorème 13.12 (a) et d'après la proposition 16.2 on obtient des bijections

$$(16.5) \quad \begin{array}{ccc} \text{Irr } W(\tilde{s})^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, \tilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s}) \\ \chi & \longmapsto & \tilde{R}_\chi[\tilde{s}] \end{array}$$

et

$$(16.6) \quad \begin{array}{ccc} \text{Irr } W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s}) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta[s] \end{array}.$$

D'après [Lu5, chapitre 8], la bijection 16.5 est bien définie une fois fixée la convention suivante :

$$(16.7) \quad \tilde{R}_1[\tilde{s}] = \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{G}}}$$

et, par la remarque 13.14 (b), la bijection 16.6 est bien définie une fois fixée la convention suivante :

$$(16.8) \quad R_1[s] = \rho_{s,1}^{\mathbf{G}}.$$

S'il y a ambiguïté, nous noterons $R_\eta^{\mathbf{G}}[s]$ le caractère irréductible $R_\eta[s]$ de \mathbf{G}^F ($\eta \in \text{Irr } W(s)^{F^*}$) et par $R_\chi^{\tilde{\mathbf{G}}}[\tilde{s}]$ le caractère irréductible $\tilde{R}_\chi[\tilde{s}]$ de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ ($\chi \in \text{Irr } W(\tilde{s})^{F^*}$).

REMARQUE 16.9 - D'après le théorème 11.10, on a

$$\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, \tilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}_s}) \subset \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$$

et

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s}) \subset \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]). \quad \square$$

Grâce aux théorèmes 13.12 et 13.16, on obtient :

Théorème 16.10.

- (a) Si η et χ sont des caractères irréductibles de $W(s)^{F^*}$ et $W^\circ(s)^{F^*} = W(\tilde{s})^{F^*}$ respectivement, alors

$$\langle R_\eta[s], \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{R}_\chi[\tilde{s}] \rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \text{Res}_{W(\tilde{s})^{F^*}}^{W(s)^{F^*}} \eta, \chi \rangle_{W(\tilde{s})^{F^*}}.$$

- (b) Si $\eta \in \text{Irr } W(s)^{F^*}$ et $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, alors

$${}^{g\xi} R_\eta[s] = R_{\eta \otimes \xi}[s].$$

- (c) Soit \mathbf{L} un complément de Levi F -stable d'un sous-groupe parabolique F -stable \mathbf{P} de \mathbf{G} contenant \mathbf{L}_s . Fixons un sous-groupe de Levi F^* -stable \mathbf{L}^* d'un sous-groupe parabolique F^* -stable de \mathbf{G}^* contenant \mathbf{L}_s^* et tel que la \mathbf{L}^F -classe de conjugaison de \mathbf{L}_s soit associée à la \mathbf{L}^{*F^*} -classe de conjugaison de \mathbf{L}_s^* . Notons $W_{\mathbf{L}}(s)$ le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{L}}(s)$ relativement à \mathbf{T}_1^* . Alors

$$\langle R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} R_\eta^{\mathbf{L}}[s], R_\zeta^{\mathbf{G}}[s] \rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \text{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}}^{W(s)^{F^*}} \eta, \zeta \rangle_{W(s)^{F^*}}$$

pour tous caractères irréductibles η et ζ de $W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ et $W(s)^{F^*}$ respectivement.

Remarquons que l'assertion (c) du théorème précédent 16.10 utilise le corollaire 15.12.

17. CARACTÈRES SEMI-SIMPLES ET FONCTIONS ABSOLUMENT CUSPIDALES

17.A. Un exemple de fonction absolument cuspidale. Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, on pose

$$\dot{\rho}_{s,a} = \dot{\rho}_{s,a}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} \sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge} \xi(a)^{-1} \rho_{s,\xi}.$$

Il est facile de retrouver les caractères irréductibles $\rho_{s,\xi}$ comme combinaisons linéaires des $\dot{\rho}_{s,a}$. En effet, si $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, on a

$$(17.1) \quad \rho_{s,\xi} = \frac{\varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)}}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \xi(a) \dot{\rho}_{s,a}.$$

Par ailleurs, il résulte du corollaire 15.14 que

$$(17.2) \quad \dot{\rho}_{s,a} \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a).$$

Si a et b sont deux éléments de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, un calcul élémentaire montre que

$$(17.3) \quad \langle \dot{\rho}_{s,a}, \dot{\rho}_{s,b} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \begin{cases} |A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| & \text{si } a = b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après l'exemple 10.6, on a :

Proposition 17.4. Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ est tel que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$, alors $\dot{\rho}_{s,a}$ est une fonction absolument cuspidale.

17.B. Restriction de Lusztig. Nous travaillerons sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse : Nous supposons jusqu'à la fin de ce chapitre que p est bon pour \mathbf{G} .

Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} et soit \mathbf{L}^* un sous-groupe de Levi F^* -stable de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{L} . L'hypothèse entraîne que l'application $\text{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ entre ensemble de classes unipotentes régulières est bien définie (voir §14.E). En particulier, le caractère de Gelfand-Graev $\Gamma^{\mathbf{L}}$ est lui aussi bien défini. Nous allons ici donner une formule pour la restriction de Lusztig des caractères $\rho_{s,\xi}^{\mathbf{G}}$.

Proposition 17.5. Supposons que la formule de Mackey et la conjecture (G) ont lieu dans \mathbf{G} . Soit $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Pour tout $t \in \mathbf{L}^{*F^*}$ tel qu'il existe $g \in \mathbf{G}^{*F^*}$ vérifiant ${}^g s = t$, on pose $\xi_t = \text{Res}_{A_{\mathbf{L}^*}(t)^{F^*}}^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} {}^g \xi$; le caractère linéaire ξ_t ne dépend pas du choix de g . Alors

$${}^* R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \rho_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{L}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} \sum_{[t]_{\mathbf{L}^{*F^*}} \subset [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}} \varepsilon_{C_{\mathbf{L}^*}(t)} \rho_{t,\xi_t}^{\mathbf{L}}$$

et

$${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}} \sum_{[t]_{\mathbf{L}^{*F^*}} \subset [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}} \chi_{t,\xi_t}^{\mathbf{L}}.$$

REMARQUE 17.6 - La proposition 17.5 généralise le corollaire 15.15 tout comme le théorème 14.11 généralisait le théorème 14.4. \square

Corollaire 17.7. *Supposons que la formule de Mackey et la conjecture (G) ont lieu dans \mathbf{G} . Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Pour tout $t \in \mathbf{L}^{*F^*}$ tel qu'il existe $g \in \mathbf{G}^{*F^*}$ vérifiant ${}^g s = t$, on note a_t l'élément gag^{-1} de $A_{\mathbf{G}^*}(t)^{F^*}$; l'élément a_t ne dépend pas du choix de g . Alors*

$${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\dot{\rho}_{s,a}^{\mathbf{G}} = \sum_{\substack{[t]_{\mathbf{L}^{*F^*}} \subset [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}} \\ a_t \in A_{\mathbf{L}^*}(t)^{F^*}}} \frac{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}{|A_{\mathbf{L}^*}(t)^{F^*}|} \dot{\rho}_{t,a_t}^{\mathbf{L}}.$$

17.C. Combinaisons linéaires d'induits de caractères semi-simples. Soit $w \in W(s)$. On fixe un élément $g_w \in \mathbf{G}^*$ tel que $g_w^{-1}F(g_w)$ normalise \mathbf{T}_1^* et représente w . On pose alors $\mathbf{T}_w^* = {}^{g_w}\mathbf{T}_1^*$ et $s_w = g_w s g_w^{-1}$. D'après le théorème de Lang, on peut choisir g_w de sorte que $s_w = s_\alpha$, où α désigne la classe de w dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. C'est ce que nous ferons dans la suite. Il est à noter que le couple (\mathbf{T}_w^*, s_w) est bien défini à \mathbf{G}^{*F^*} -conjugaison près par w (et même par la classe de w dans $H^1(F^*, W(s))$): en effet, le stabilisateur du couple (\mathbf{T}_1^*, s) dans \mathbf{G}^* est égal à l'image inverse de $W(s)$ dans $N_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{T}_1^*)$.

Fixons maintenant $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Alors le sous-groupe de Levi F^* -stable $\mathbf{L}_{s,a}^*$ a été défini dans §8.D. Si $w \in W(s)^a$, on pose $\mathbf{L}_{s,a,w}^* = {}^{g_w}\mathbf{L}_{s,a}^*$. Alors le couple $(\mathbf{L}_{s,a,w}^*, s_w)$ est bien défini à \mathbf{G}^{*F^*} -conjugaison près par w (et même par la classe de w dans $H^1(F^*, W(s)^a)$): en effet, le stabilisateur du couple $(\mathbf{L}_{s,a}^*, s)$ dans \mathbf{G}^* est égal à l'image inverse de $W(s)^a$ dans $N_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{T}_1^*)$ d'après le corollaire 8.11 (e)). De plus, puisque $a \in A_{\mathbf{L}_{s,a}^*}(s)^{F^*}$ par construction, on en déduit que $a \in A_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s)^{F^*}$ pour tout $w \in W(s)^a$ (à travers le morphisme injectif naturel $A_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s) \hookrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)$). Notons que

$$(17.8) \quad C_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}^{\circ}(s_w) = \mathbf{T}_w^*$$

(voir corollaire 8.11 (a)). Notons $\mathbf{L}_{s,a,w}$ un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} dual de $\mathbf{L}_{s,a,w}^*$. Alors le couple $(\mathbf{L}_{s,a,w}, \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}})$ est bien défini à \mathbf{G}^F -conjugaison près par w (et même par la classe de w dans $H^1(F^*, W(s)^a)$). Donc la fonction $R_{\mathbf{L}_{s,a,w}}^{\mathbf{G}}\dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}$ est bien définie: nous la noterons $\mathcal{R}_{s,a,w}$. Elle appartient à $\overline{\mathbb{Q}_\ell}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$. Si α désigne la classe de w dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, alors, d'après le théorème 11.10 et 17.2, on a

$$(17.9) \quad \mathcal{R}_{s,a,w} \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s_\alpha], a).$$

Si $f \in \text{Cent}(W(s)^a\phi_1)$, on pose :

$$\mathcal{R}(s, a)_f = \frac{1}{|W(s)^a|} \sum_{w \in W(s)^a} f(w\phi_1) \mathcal{R}_{s,a,w}.$$

D'après 17.9, cela nous définit une application linéaire $\mathcal{R}(s, a) : \text{Cent}(W(s)^a\phi_1) \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$. S'il est nécessaire de préciser le groupe ambiant, nous noterons $\mathcal{R}_{s,a,w}^{\mathbf{G}}$ la fonction $\mathcal{R}_{s,a,w}$ et $\mathcal{R}(s, a)_f^{\mathbf{G}}$ la fonction $\mathcal{R}(s, a)_f$.

REMARQUE 17.10 - Si $\tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, nous identifierons τ à une fonction centrale sur $W(s)^a\phi_1$ de la façon suivante: si $w \in W(s)^a$, l'image de $w\phi_1$ par cette fonction centrale est égale à $\tau(\bar{w})$, où \bar{w} est l'image de w à travers la suite de morphismes $W(s)^a \rightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s) \rightarrow H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Avec cette notation, on a, pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ et pour tout $f \in \text{Cent}(W(s)^a\phi_1)$,

$$t_z^{\mathbf{G}}\mathcal{R}(s, a)_f = \hat{s}(z)\mathcal{R}(s, a)_{f\hat{\omega}_s^1(\bar{z})}.$$

Ici, \bar{z} désigne l'image de z dans $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F$. Pour montrer cela, il suffit de remarquer que, d'après le lemme 9.14 et d'après la remarque 11.1 (d), on a

$$t_z^{\mathbf{G}}\mathcal{R}_{s,a,w} = \hat{s}(z)\hat{\omega}_s^1(\bar{z})(\bar{w})\mathcal{R}_{s,a,w}$$

pour tout $w \in W(s)^a$. \square

Proposition 17.11. *Supposons que la formule de Mackey a lieu dans \mathbf{G} . Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ et soient w et w' deux éléments de $W(s)^a$. Alors*

$$\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \begin{cases} |C_{W(s)^a}(w\phi_1)| & \text{si } w\phi_1 \text{ et } w'\phi_1 \text{ sont conjugués sous } W(s)^a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION - D'après la formule de Mackey, et compte tenu de la proposition 17.4, on a

$$\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \sum_{n \in [\mathcal{N}_{w,w'}^F / \mathbf{L}_{s,a,w'}^F]} \langle \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}, {}^n \dot{\rho}_{s_{w'},a}^{\mathbf{L}_{s,a,w'}} \rangle_{\mathbf{L}_{s,a,w}^F},$$

où $\mathcal{N}_{w,w'} = \{n \in \mathbf{G} \mid \mathbf{L}_{s,a,w} = {}^n \mathbf{L}_{s,a,w'}\}$. D'autre part, on a une bijection naturelle entre $[\mathcal{N}_{w,w'}^F / \mathbf{L}_{s,a,w'}^F]$ et $[\mathcal{N}_{w,w'}^{*F^*} / \mathbf{L}_{s,a,w'}^{*F^*}]$ (où bien sûr $\mathcal{N}_{w,w'}^{*F^*} = \{n \in \mathbf{G}^* \mid \mathbf{L}_{s,a,w} = {}^n \mathbf{L}_{s,a,w'}\}$) et, à travers cette bijection, on a

$$\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \sum_{n \in [\mathcal{N}_{w,w'}^{*F^*} / \mathbf{L}_{s,a,w'}^{*F^*}]} \langle \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}, \dot{\rho}_{ns_{w'}n^{-1},a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}} \rangle_{\mathbf{L}_{s,a,w}^F}.$$

En particulier, si les couples $(\mathbf{L}_{s,a,w}^*, s_w)$ et $(\mathbf{L}_{s,a,w'}^*, ns_{w'}n^{-1})$ ne sont pas conjugués sous \mathbf{G}^{*F^*} (c'est-à-dire si $w\phi_1$ et $w'\phi_1$ ne sont pas conjugués sous $W(s)^a$), alors $\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'} \rangle_{\mathbf{G}^F} = 0$. Nous pouvons donc supposer maintenant que $w = w'$. On a, dans ce cas,

$$\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \sum_{n \in [N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}_{s,a,w}^*) / \mathbf{L}_{s,a,w}^{*F^*}]} \langle \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}, \dot{\rho}_{ns_{w'}n^{-1},a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}} \rangle_{\mathbf{L}_{s,a,w}^F}.$$

Soit maintenant $n \in N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}_{s,a,w}^*)$. Posons $\beta_n = \langle \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}, \dot{\rho}_{ns_{w'}n^{-1},a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}} \rangle_{\mathbf{L}_{s,a,w}^F}$. Si s_w et $ns_{w'}n^{-1}$ ne sont pas $\mathbf{L}_{s,a,w}^{*F^*}$ -conjugués, alors $\beta_n = 0$. Si s_w et $ns_{w'}n^{-1}$ sont $\mathbf{L}_{s,a,w}^{*F^*}$ -conjugués, alors il existe un représentant de la classe de n dans $N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}_{s,a,w}^*) / \mathbf{L}_{s,a,w}^{*F^*}$ qui centralise s_w et alors $\beta_n = |A_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s_w)^{F^*}|$. Par suite,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'} \rangle_{\mathbf{G}^F} &= |A_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s_w)^{F^*}| \times \left| \left(N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}_{s,a,w}^*) \cap C_{\mathbf{G}^*}(s_w)^{F^*} \right) / C_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s_w)^{F^*} \right| \\ &= \left| \left(N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}_{s,a,w}^*) \cap C_{\mathbf{G}^*}(s_w)^{F^*} \right) / C_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}^\circ(s_w)^{F^*} \right|. \end{aligned}$$

Or, $C_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}^\circ(s_w) = \mathbf{T}_w^*$ et, d'après le corollaire 8.11 (e), on a $(N_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{L}_{s,a}^*) \cap C_{\mathbf{G}^*}(s)) / \mathbf{T}_1^* \simeq W(s)^a$. D'où le résultat. ■

Corollaire 17.12. *Supposons que la formule de Mackey a lieu dans \mathbf{G} . Alors l'application $\mathcal{R}(s,a) : \text{Cent}(W(s)^a\phi_1) \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$ est une isométrie.*

17.D. Induction de Lusztig. Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} et soit \mathbf{L}^* un sous-groupe de Levi F^* -stable de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{L} . On suppose que \mathbf{L}^* contient un élément $s' \in \mathbf{L}^{*F^*}$ géométriquement conjugué à s . Le but de cette section est de décrire l'action de l'induction de Lusztig $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ sur l'image de $\mathcal{R}(s', a)^{\mathbf{L}}$, pour $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s')^{F^*}$. Le résultat décrit cette action en termes d'une induction tordue entre les groupes $W_{\mathbf{L}}(s')$ et $W(s)$. Avant d'exprimer ce résultat, nous avons besoin de comparer ces deux groupes. On se fixe un sous-groupe parabolique \mathbf{P}^* de \mathbf{G}^* dont \mathbf{L}^* est un sous-groupe de Levi et on note \mathbf{V}^* le radical unipotent de \mathbf{P}^* .

Fixons tout d'abord un élément $g \in \mathbf{G}^*$ tel que $gsg^{-1} = s'$. Soit $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^*$ un sous-groupe de Borel F^* -stable de $C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s')$ et soit $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^*$ un tore maximal F^* -stable de $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^*$. Alors $g^{-1}(\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^* C_{\mathbf{V}^*}(s'))$ est un sous-groupe de Borel de $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ et $g^{-1}\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^*$ est un tore maximal de $g^{-1}(\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^* C_{\mathbf{V}^*}(s'))$. Donc il existe $h \in C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ tel que

$$(\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^*, \mathbf{B}_{\mathbf{L}}^* C_{\mathbf{V}^*}(s')) = {}^{gh}(\mathbf{T}_1^*, \mathbf{B}_1^*).$$

Notons que $(gh)s(gh)^{-1} = s'$. Par suite, $(gh)^{-1}F^*(gh)$ normalise \mathbf{T}_1^* et centralise s : on note $w_{\mathbf{L}}$ sa classe dans $W(s)$. Puisque le couple $(\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^*, \mathbf{B}_{\mathbf{L}}^*)$ est bien défini à conjugaison près par un élément de $C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s')^{F^*}$, l'élément $w_{\mathbf{L}}$ est bien défini par la couple (\mathbf{L}^*, s') . En particulier, si on identifie $A_{\mathbf{L}^*}(s')$ avec le sous-groupe correspondant de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ (via la conjugaison par gh), alors $w_{\mathbf{L}}$ commute avec $A_{\mathbf{L}^*}(s')$. D'autre part, via la conjugaison par gh , nous verrons $W_{\mathbf{L}}(s')$ et $W_{\mathbf{L}}^\circ(s')$ comme des sous-groupes $w_{\mathbf{L}}F^*$ -stables de $W(s)$ et $W^\circ(s)$ respectivement.

Proposition 17.13. *Soit $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s')^{F^*}$ et identifions a avec un élément de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ comme ci-dessus. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \text{Cent}(W_{\mathbf{L}}(s')^a w_{\mathbf{L}} \phi_1) & \xrightarrow{\mathcal{R}(s', a)^{\mathbf{L}}} & \text{Cent}(\mathbf{L}^F, (s'), a) \\ \text{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s')^a w_{\mathbf{L}} \phi_1}^{W(s)^a \phi_1} \downarrow & & \downarrow R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \\ \text{Cent}(W(s)^a \phi_1) & \xrightarrow{\mathcal{R}(s, a)^{\mathbf{G}}} & \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a) \end{array}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION - Si $w \in W_{\mathbf{L}}(s')^a$ (vu comme un sous-groupe de $W(s)^a$), nous fixons un élément $l_w \in \mathbf{L}^{*F^*}$ tel que $l_w^{-1}F^*(l_w)$ appartienne au normalisateur de $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^*$ et représente $(gh)w(gh)^{-1}$. On a $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^* = (gh)\mathbf{T}_1^*(gh)^{-1}$ et remarquons que $(l_w gh)^{-1}F^*(l_w gh)$ normalise \mathbf{T}_1^* et représente $ww_{\mathbf{L}}$. La proposition découle alors facilement de cette observation, de la transitivité de l'induction et de [Bon2, lemme 3.1.1]. ■

17.E. Transformés de Fourier de caractères semi-simples. Si A est un groupe abélien fini et si φ est un automorphisme de A , on note $\mathcal{M}(A, \varphi)$ le groupe $(A^\varphi)^\wedge \times H^1(\varphi, A)$. Son dual $\mathcal{M}(A, \varphi)^\wedge$ est égal à $A^\varphi \times H^1(\varphi, A)^\wedge$. Si $(a, \tau) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)^\wedge$, on pose

$$\hat{\rho}_{s, a, \tau} = \hat{\rho}_{s, a, \tau}^{\mathbf{G}} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{(\xi, \alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)} \tau(\alpha) \xi(a)^{-1} \rho_{s_\alpha, \xi}.$$

Ici, nous avons identifié le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s_\alpha)$ avec le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ (via la conjugaison par l'élément g_α tel que $g_\alpha s g_\alpha^{-1} = s_\alpha$) : cette identification ne change pas l'action du morphisme de Frobenius car $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est abélien. Si $(\xi, \alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$, alors

$$(17.14) \quad \rho_{s_\alpha, \xi} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{(a, \tau) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)^\wedge} \tau(\alpha)^{-1} \xi(a) \hat{\rho}_{s, a, \tau}.$$

Proposition 17.15. *Soient (a, τ) et (a', τ') deux éléments de $\mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)^\wedge$. Alors :*

- (a) $\hat{\rho}_{s, a, \tau} \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$.
- (b) $\hat{\rho}_{s, a, \tau} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))} \tau(\alpha) \dot{\rho}_{s_\alpha, a}$.
- (c) $\langle \hat{\rho}_{s, a, \tau}, \hat{\rho}_{s, a', \tau'} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a, \tau) = (a', \tau'), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- (d) Si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$, alors $\iota_z^{\mathbf{G}} \hat{\rho}_{s, a, \tau} = \hat{s}(z) \hat{\rho}_{s, a, \tau \hat{\omega}_s^1(z)}$.
- (e) Si la formule de Mackey et la conjecture (\mathfrak{G}) ont lieu dans \mathbf{G} , alors

$$\hat{\rho}_{s, a, \tau} = \mathcal{R}(s, a)_\tau.$$

Ici, τ est vu comme la fonction centrale sur $W(s)^a \phi_1$ qui envoie $w \phi_1$ sur $\tau(\bar{w})$, où \bar{w} désigne l'image de w dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$.

DÉMONSTRATION - (a), (b) et (c) sont évidents. (d) se montre de la même manière que la première égalité de la remarque 17.10. Montrons (e). Tout d'abord, d'après (a) et le corollaire 17.12, on a $\langle \hat{\rho}_{s, a, \tau}, \hat{\rho}_{s, a, \tau} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \mathcal{R}(s, a)_\tau, \mathcal{R}(s, a)_\tau \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1$. Il nous reste à montrer que

$$(*) \quad \langle \hat{\rho}_{s, a, \tau}, \mathcal{R}(s, a)_\tau \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1.$$

Soit $w \in W(s)^a$ et notons α la classe de w dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Pour montrer (*), il suffit de montrer que

$$(**) \quad \langle \hat{\rho}_{s, a, \tau}, \tau(\alpha) R_{\mathbf{L}_{s, a, w}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s_{w, a}}^{\mathbf{L}_{s, a, w}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1.$$

Mais, d'après (b), d'après 17.9 et d'après le théorème 11.10, on a, par adjonction,

$$\langle \hat{\rho}_{s, a, \tau}, \tau(\alpha) R_{\mathbf{L}_{s, a, w}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s_{w, a}}^{\mathbf{L}_{s, a, w}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \langle \tau(\alpha)^* R_{\mathbf{L}_{s, a, w}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s_\alpha, a}, \tau(\alpha) \dot{\rho}_{s_{w, a}}^{\mathbf{L}_{s, a, w}} \rangle_{\mathbf{G}^F}.$$

Par suite, d'après 17.3 et le corollaire 17.7, on a

$$\langle \hat{\rho}_{s,a,\tau}, \tau(\alpha) R_{\mathbf{L}_{s,a,w}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s_w,a,w}^{\mathbf{L}_{s,a,w}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \times \frac{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}{|A_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s_w)^{F^*}|} \times |A_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s_w)^{F^*}| = 1,$$

ce qui montre (**). ■

EXEMPLE 17.16 - Supposons dans cet exemple, et uniquement dans cet exemple, que $a = 1$. Nous poserons alors $\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(s, 1)$. D'autre part, $\mathbf{L}_{s,1,w}^* = \mathbf{T}_w^*$. Si η est un caractère irréductible F^* -stable de $W(s)$ et si $\tilde{\eta}$ est une extension de η à $W(s) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$, alors $\mathcal{R}(s)_{\tilde{\eta}}$ est un *caractère fantôme* de \mathbf{G}^F . Tous les caractères fantômes de \mathbf{G}^F ne sont pas obtenus ainsi. □

17.F. Séries rationnelles. Nous allons maintenant construire une isométrie $\mathcal{R}[s, a]$ de l'espace des fonctions centrales sur $W^\circ(s)^a \phi_1$ invariantes par l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ vers $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$. Si $f \in \text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1)$, on pose

$$\mathcal{R}[s, a]_f = \mathcal{R}[s, a]_f^{\mathbf{G}} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| \cdot |W^\circ(s)^a|} \sum_{w \in W^\circ(s)^a} f(w\phi_1) \mathcal{R}_{s,a,w}.$$

D'après 17.9, on a $\mathcal{R}_{s,a,w} \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$ pour tout $w \in W^\circ(s)^a$. On a donc défini une application $\mathcal{R}[s, a] : \text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1) \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$ dont il est facile de vérifier que, si $f \in \text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1)$ et $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, alors

$$(17.17) \quad \mathcal{R}[s, a]_f = \mathcal{R}[s, a]_{bf}.$$

En particulier, l'image de $\mathcal{R}[s, a]$ est égale à l'image de sa restriction à $(\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$. Si f et g sont deux éléments de $(\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$, on pose

$$\langle f, g \rangle_{s,a} = \frac{\langle f, g \rangle_{W^\circ(s)^a \phi_1}}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}.$$

Alors $\langle, \rangle_{s,a}$ est un produit scalaire sur $(\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$.

Proposition 17.18. *Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Alors l'application $\mathcal{R}[s, a] : (\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$ est une isométrie (pour les produits scalaires $\langle, \rangle_{s,a}$ et $\langle, \rangle_{\mathbf{G}^F}$).*

DÉMONSTRATION - Si $f \in \text{Cent}(W(s)^a \phi_1)$, on note $\text{Res}_{s,a}^\circ f$ sa restriction à $W^\circ(s)^a \phi_1$. Il est alors immédiat que $\text{Res}_{s,a}^\circ f$ est stable sous l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Cela nous définit donc une application $\text{Res}_{s,a}^\circ : \text{Cent}(W(s)^a \phi_1) \rightarrow (\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$. Réciproquement, si $f \in (\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$, on pose, pour $w \in W^\circ(s)^a \phi_1$ et $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$,

$$(\text{Ext}_{s,a}^\circ f)(wb\phi_1) = \begin{cases} f(cwc^{-1}\phi_1) & \text{si } b = c^{-1}F^*(c) \text{ pour un } c \in A_{\mathbf{G}^*}(s), \\ 0 & \text{si } b \neq c^{-1}F^*(c) \text{ pour tout } c \in A_{\mathbf{G}^*}(s). \end{cases}$$

Il est à noter que la première formule ne dépend pas du choix de c car f est invariante sous l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Il est alors clair que $\text{Ext}_{s,a}^\circ f \in \text{Cent}(W(s)^a \phi_1)$. On a donc défini une application $\text{Ext}_{s,a}^\circ : (\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \rightarrow \text{Cent}(W(s)^a \phi_1)$. De plus,

$$(17.19) \quad \text{Res}_{s,a}^\circ \circ \text{Ext}_{s,a}^\circ = \text{Id}_{(\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}}.$$

D'autre part, $\text{Ext}_{s,a}^\circ$ est une isométrie (pour les produits scalaires $\langle, \rangle_{s,a}$ et $\langle, \rangle_{W(s)^a \phi_1}$) et le diagramme

$$(17.20) \quad \begin{array}{ccc} (\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} & \xrightarrow{\mathcal{R}[s,a]} & \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) \\ \downarrow \text{Ext}_{s,a}^\circ & & \downarrow \\ \text{Cent}(W(s)^a \phi_1) & \xrightarrow{\mathcal{R}(s,a)} & \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a) \end{array}$$

est commutatif. Les applications $\mathcal{R}(s, a)$, $\text{Ext}_{s,a}^\circ$ et l'injection $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) \hookrightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$ étant des isométries, on en déduit que $\mathcal{R}[s, a]$ est une isométrie. ■

REMARQUE 17.21 - Il était possible de démontrer directement en utilisant la proposition 17.11 que $\mathcal{R}[s, a]$ est une isométrie. Nous avons cependant voulu introduire les applications $\text{Res}_{s,a}^\circ$ et $\text{Ext}_{s,a}^\circ$ car elles nous seront utiles par la suite. □

Proposition 17.22. *Si la formule de Mackey et la conjecture (G) ont lieu dans \mathbf{G} , alors*

$$\mathcal{R}[s, a]_1 = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \dot{\rho}_{s,a}.$$

Ici, 1 est vu comme la fonction constante et égale à 1.

DÉMONSTRATION - Notons $\pi_{[s]} : \text{Cent}(\mathbf{G}^F) \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$ la projection orthogonale. Alors le diagramme

$$(17.23) \quad \begin{array}{ccc} \text{Cent}(W(s)^a \phi_1) & \xrightarrow{\mathcal{R}(s,a)} & \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a) \\ \text{Res}_{s,a}^\circ \downarrow & & \downarrow \pi_{[s]} \\ (\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} & \xrightarrow{\mathcal{R}[s,a]} & \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) \end{array}$$

est commutatif. D'où $\mathcal{R}[s, a]_1 = \pi_{[s]} \mathcal{R}(s, a)_1$. Le résultat découle alors de la proposition 17.15 (e). ■

Nous concluons ce chapitre par un résultat décrivant l'induction de Lusztig à travers les applications $\mathcal{R}[s, a]$. Soit donc \mathbf{L} un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} et soit \mathbf{L}^* un sous-groupe de Levi F^* -stable de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{L} . On suppose que $s \in \mathbf{L}^{*F^*}$. Reprenons les notations de §17.D (en remplaçant s' par s), de sorte que $W_{\mathbf{L}}(s)$ est vu comme un sous-groupe $w_{\mathbf{L}}F^*$ -stable de $W(s)$. Remarquons aussi que, puisque $s' = s$, on a $w_{\mathbf{L}} \in W^\circ(s)$.

Proposition 17.24. *Supposons que $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}$. Alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Cent}(W_{\mathbf{L}}^\circ(s)^a w_{\mathbf{L}} \phi_1) & \xrightarrow{|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}| \mathcal{R}[s,a]^{\mathbf{L}}} & \text{Cent}(\mathbf{L}^F, [s]) \\ \text{Ind}_{W_{\mathbf{L}}^\circ(s)^a w_{\mathbf{L}} \phi_1}^{W^\circ(s)^a \phi_1} \downarrow & & \downarrow R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \\ \text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1) & \xrightarrow{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| \mathcal{R}[s,a]^{\mathbf{G}}} & \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s]). \end{array}$$

DÉMONSTRATION - Le même argument que dans la preuve de la proposition 17.13 allié encore à [Bon2, lemme 3.1.1] prouve immédiatement cette proposition. ■

Chapitre VI. Faisceaux-caractères

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'influence de la non connexité du centre de \mathbf{G} sur la théorie des faisceaux-caractères. Le centre de \mathbf{G} agit sur les faisceaux-caractères de deux façons. La première est la trace de l'action par conjugaison : cette action induit une action sur chaque faisceau-caractère par multiplication par un caractère linéaire de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Le calcul de ce caractère linéaire est classique mais nous le rappelons ici (voir proposition 18.4). La deuxième action est l'action par translation : le translaté d'un faisceau-caractère par un élément de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ est encore un faisceau-caractère. Cela induit une action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ par permutations de l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères. Nous étudions cette action à travers le processus d'induction parabolique (voir théorème 19.4). Nous en profitons pour tirer quelques conséquences de ce théorème sur le paramétrage ou sur les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères. À partir de la section 21, nous nous consacrons aux faisceaux-caractères apparaissant dans l'induit d'un faisceau-caractère cuspidal dont le support rencontre la classe unipotente régulière. Nous y établissons un paramétrage de tels faisceaux-caractères séries par séries et obtenons une formule pour leurs fonctions caractéristiques comme combinaisons linéaires d'induits de Lusztig de caractères semi-simples (voir théorème 22.5). Comme conséquence, nous obtenons que la fonction caractéristique d'un faisceau-caractère, non nécessairement cuspidal, dont le support rencontre la classe unipotente régulière est une transformée de Fourier de caractères semi-simples (voir corollaire 22.7).

18. ACTION DE $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ SUR LES FAISCEAUX-CARACTÈRES

Nous rappelons dans cette section comment sont construits les faisceaux-caractères avant d'étudier l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$.

18.A. Systèmes locaux kummériens. Fixons un sous-groupe de Borel \mathbf{B} de \mathbf{G} ainsi qu'un tore maximal \mathbf{T} de \mathbf{B} . Soit \mathbf{U} le radical unipotent de \mathbf{B} . Nous fixons aussi un tore maximal \mathbf{T}^* de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{T} . Nous identifions le groupe de Weyl W de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T} avec celui de \mathbf{G}^* relativement à \mathbf{T}^* . Nous ferons aussi l'identification $X(\mathbf{T}) = Y(\mathbf{T}^*)$.

Notons $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ l'ensemble des classes d'isomorphie de systèmes locaux kummériens sur \mathbf{T} . Le produit tensoriel munit $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ d'une structure de groupe abélien. D'autre part, le groupe W agit naturellement sur $\mathcal{S}(\mathbf{T})$. Le choix des applications ι, j et κ construites dans §1.B permet de construire un isomorphisme W -équivariant de groupes abéliens $\mathbf{T}^* \simeq \mathcal{S}(\mathbf{T})$, $s \mapsto \mathcal{L}_s$. Nous allons rappeler sa définition : si $s \in \mathbf{T}^*$, il existe $x \in X(\mathbf{T}) = Y(\mathbf{T}^*)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, premier à p , tels que $\tilde{\iota}_{\mathbf{T}^*}(x/n) = s$. On note $e_n : \mathbb{F}^\times \rightarrow \mathbb{F}^\times$, $z \mapsto z^n$. C'est un revêtement étale galoisien de groupe $\mu_n(\mathbb{F})$. Nous noterons \mathcal{X}_n le système local sur \mathbb{F}^\times associé à ce revêtement et au caractère linéaire $\kappa : \mu_n(\mathbb{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. On a alors :

$$(18.1) \quad \mathcal{L}_s = x^* \mathcal{X}_n.$$

Ici, $x : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{F}^\times$ est seulement vu comme un morphisme de variétés.

18.B. Faisceaux-caractères. Fixons maintenant un élément w de W et un représentant \dot{w} de w dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$. Nous noterons $\pi_{\dot{w}} : \mathbf{B}w\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{T}$ l'unique application telle que, si v et v' appartiennent à \mathbf{U} et $t \in \mathbf{T}$, alors $\pi_{\dot{w}}(v\dot{w}tv') = t$. C'est un morphisme de variétés. Soient

$$\hat{\mathbf{Y}}_w = \{(g, h\mathbf{U}) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid h^{-1}gh \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}$$

et
$$\tilde{\mathbf{Y}}_w = \{(g, h\mathbf{B}) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid h^{-1}gh \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}.$$

Notons $\beta_w : \hat{\mathbf{Y}}_w \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_w$ l'application canonique. Posons

$$\alpha_{\dot{w}} : \begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{Y}}_w & \longrightarrow & \mathbf{T} \\ (g, h\mathbf{U}) & \longmapsto & \pi_{\dot{w}}(h^{-1}gh) \end{array}$$

et
$$\gamma_w : \begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{Y}}_w & \longrightarrow & \mathbf{G} \\ (g, h\mathbf{B}) & \longmapsto & g. \end{array}$$

Alors $\alpha_{\dot{w}}$, β_w et γ_w sont des morphismes de variétés bien définis. Nous avons donc construit un diagramme

$$\mathbf{T} \xleftarrow{\alpha_{\dot{w}}} \hat{\mathbf{Y}}_w \xrightarrow{\beta_w} \tilde{\mathbf{Y}}_w \xrightarrow{\gamma_w} \mathbf{G}.$$

Le groupe \mathbf{T} agit sur $\hat{\mathbf{Y}}_w$ de la façon suivante : si $t \in \mathbf{T}$ et si $(g, h\mathbf{U}) \in \hat{\mathbf{Y}}_w$, on pose

$$t * (g, h\mathbf{U}) = (g, ht^{-1}\mathbf{U}).$$

Alors β_w est une fibration principale de groupe \mathbf{T} . D'autre part, le groupe \mathbf{T} agit sur \mathbf{T} de la façon suivante : si t et t' appartiennent à \mathbf{T} , on pose

$$t *_w t' = \dot{w}^{-1} t w t' t^{-1}.$$

Alors il est facile de vérifier que $\alpha_{\dot{w}}$ est \mathbf{T} -équivariante. De plus, le groupe \mathbf{G} agit diagonalement sur $\hat{\mathbf{Y}}_w$ et $\tilde{\mathbf{Y}}_w$ par conjugaison sur la première coordonnée et par translation à gauche sur la deuxième, et il agit sur \mathbf{G} par conjugaison. Les morphismes β_w et γ_w sont alors \mathbf{G} -équivariants.

Soit $s \in \mathbf{T}^*$ et supposons que w vérifie $w(s) = s$. Alors, d'après [Lu6, 2.2.2], \mathcal{L}_s est \mathbf{T} -équivariant pour l'action $*_w$. En particulier, $\alpha_{\dot{w}}^* \mathcal{L}_s$ est un système local \mathbf{T} -équivariant sur $\hat{\mathbf{Y}}_w$. Par suite, il existe un unique (à isomorphisme près) système local $\tilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ sur $\tilde{\mathbf{Y}}_w$ tel que $\beta_w^* \tilde{\mathcal{L}}_{w,s} \simeq \alpha_{\dot{w}}^* \mathcal{L}_s$. De plus, puisque $\alpha_{\dot{w}}^* \mathcal{L}_s$ est \mathbf{G} -équivariant, il en est de même de $\tilde{\mathcal{L}}_{w,s}$. Posons :

$$K_{w,s} = K_{w,s}^{\mathbf{G}} = R(\gamma_w)_! \tilde{\mathcal{L}}_{w,s}.$$

On rappelle qu'un faisceau pervers irréductible A sur \mathbf{G} est appelé un *faisceau-caractère* s'il existe un triplet (s, w, i) où $s \in \mathbf{T}^*$ et $w \in W$ vérifient $w(s) = s$ et i est un entier relatif tels que A soit une composante du faisceau pervers ${}^p H^i(K_{w,s})$. Nous noterons $\text{FCar}(\mathbf{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux-caractères sur \mathbf{G} . Il est à noter que tout faisceau-caractère est \mathbf{G} -équivariant pour l'action par conjugaison.

Nous allons conclure cette sous-section par une construction explicite du système local $\tilde{\mathcal{L}}_{w,s}$. Pour cela, écrivons $s = \tilde{i}_{\mathbf{T}^*}(x/n)$ comme précédemment. Dire que $w(s) = s$ équivaut à dire que $\lambda = w(x/n) - x/n \in X(\mathbf{T})$. En d'autres termes, $w(x) - x = n\lambda$, avec $\lambda \in X(\mathbf{T})$. Soit \mathbb{F}_λ le \mathbf{B} -module irréductible \mathbb{F} sur lequel \mathbf{B} agit via l'unique caractère $\tilde{\lambda} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{F}^\times$ qui étend λ . Soit \mathcal{B}_λ le fibré en droite associé à λ (il est obtenu en quotientant par \mathbf{B} la variété $\mathbf{G} \times \mathbb{F}_\lambda$, \mathbf{B} agissant diagonalement sur $\mathbf{G} \times \mathbb{F}_\lambda$ par translations à droite sur la première coordonnée et par le caractère $\tilde{\lambda}$ sur la deuxième). Si $(g, z) \in \mathbf{G} \times \mathbb{F}$, nous noterons $g *_\lambda z$ sa classe dans \mathcal{B}_λ . Nous noterons $\mathcal{B}_\lambda^\times$ le complémentaire de la section nulle dans \mathcal{B}_λ . Posons alors

$$\hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n} = \{(g, h\mathbf{U}, z) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbb{F}^\times \mid h^{-1}gh \in \mathbf{B}w\mathbf{B} \text{ et } z^n = x(\pi_{\dot{w}}(h^{-1}gh))\}$$

et
$$\tilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n} = \{(g, h *_\lambda z) \in \mathbf{G} \times \mathcal{B}_\lambda^\times \mid h^{-1}gh \in \mathbf{B}w\mathbf{B} \text{ et } z^n = x(\pi_{\dot{w}}(h^{-1}gh))\}.$$

Il est facile de voir que les variétés $\hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ et $\tilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ sont bien définies. Notons $\hat{f}_{w,x,n} : \hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \rightarrow \hat{\mathbf{Y}}_w$, $(g, h\mathbf{U}, z) \mapsto (g, h\mathbf{U})$ et $\tilde{f}_{w,x,n} : \tilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_w$, $(g, h *_\lambda z) \mapsto (g, h\mathbf{B})$. Posons aussi $\tilde{\alpha}_{w,x,n} : \hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \rightarrow \mathbb{F}^\times$, $(g, h\mathbf{U}, z) \mapsto z$ et $\tilde{\beta}_{w,x,n} : \tilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_w$, $(g, h *_\lambda z) \mapsto (g, h *_\lambda z)$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^\times & \xleftarrow{\tilde{\alpha}_{w,x,n}} & \hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n} & \xrightarrow{\tilde{\beta}_{w,x,n}} & \tilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \\ \downarrow e_n & & \downarrow \hat{f}_{w,x,n} & & \downarrow \tilde{f}_{w,x,n} \\ \mathbb{F}^\times & \xleftarrow{x \circ \alpha_{\dot{w}}} & \hat{\mathbf{Y}}_w & \xrightarrow{\beta_w} & \tilde{\mathbf{Y}}_w \xrightarrow{\gamma_w} \mathbf{G} \end{array}$$

est commutatif. De plus, les carrés sont cartésiens et les morphismes $\hat{f}_{w,x,n}$ et $\tilde{f}_{w,x,n}$ sont des revêtements galoisiens de groupe $\mu_n(\mathbb{F})$. Le lemme suivant est alors immédiat :

Lemme 18.2. $\tilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ est le système local sur $\tilde{\mathbf{Y}}_w$ associé au revêtement étale $\tilde{f}_{w,x,n}$ et au caractère linéaire $\kappa : \mu_n(\mathbb{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$.

REMARQUE 18.3 - Le groupe \mathbf{T} agit sur $\hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ comme suit : si $t \in \mathbf{T}$ et si $(g, h\mathbf{U}, z) \in \hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$, alors on pose

$${}^t(g, h\mathbf{U}, z) = (g, ht^{-1}\mathbf{U}, \lambda(t)z).$$

Il est alors facile de voir que $\tilde{f}_{w,x,n}$ est \mathbf{T} -équivariant et que $\tilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ est le quotient de $\hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ par cette action de \mathbf{T} . \square

18.C. Action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Si A est un faisceau pervers irréductible \mathbf{G} -équivariant sur \mathbf{G} , l'action par conjugaison de \mathbf{G} sur lui-même induit une action de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ sur A . Cette action se factorise par le groupe connexe $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$ et, puisque A est irréductible, cette action est donnée par un caractère linéaire $\zeta_A : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. La proposition suivante donne un moyen de calculer ce caractère linéaire lorsque A est un faisceau-caractère :

Proposition 18.4. *Soit A un faisceau-caractère sur \mathbf{G} . Soient $s \in \mathbf{T}^*$, $w \in W$ et $i \in \mathbb{Z}$ tels que $w(s) = s$ et A soit une composante irréductible de ${}^p H^i(K_{w,s})$. Notons \bar{w} l'image de w dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors*

$$\zeta_A = \omega_s(\bar{w}).$$

DÉMONSTRATION - Pour cela, il suffit de calculer l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur $\tilde{\mathcal{L}}_{w,s}$. En effet, l'action de \mathbf{G} sur $\tilde{\mathbf{Y}}_w$ induit une action triviale de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$, donc $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ agit sur le système local $\tilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ par multiplication par un caractère linéaire, qui ne peut être que ζ_A .

On utilise pour cela la description de $\tilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ donnée par le lemme 18.2 dont on reprend les notations (x, n, λ, \dots) . Le groupe \mathbf{G} agit sur $\tilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ comme suit : si $\gamma \in \mathbf{G}$ et si $(g, h *_\lambda z) \in \tilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$, on pose

$$\gamma(g, h *_\lambda z) = (\gamma g \gamma^{-1}, \gamma h *_\lambda z).$$

Alors $\tilde{f}_{w,x,n}$ est \mathbf{G} -équivariant et il suffit de regarder comment agit $\gamma \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. On a, si $\gamma \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$,

$$\gamma(g, h *_\lambda z) = (g, h *_\lambda \lambda(\gamma)z).$$

Or, on a $\lambda(\gamma)^n = x(w^{-1}(\gamma))x(\gamma)^{-1} = 1$ car γ est central, donc $\lambda(\gamma) \in \mu_n(\mathbb{F})$. Par suite, γ agit sur $\tilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ par multiplication par $\kappa(\lambda(\gamma))$. Mais, par définition de ω_s , on a $\kappa(\lambda(\gamma)) = \omega_s(\bar{w})(\bar{\gamma})$, où $\bar{\gamma}$ désigne la classe de γ dans $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ (voir 4.9). ■

18.D. Séries géométriques. Soit s un élément semi-simple de \mathbf{G}^* . Nous noterons $\text{FCar}(\mathbf{G}, (s))$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères A sur \mathbf{G} tels qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$, $t \in (s) \cap \mathbf{T}^*$ et $w \in W$ tels que $w(t) = t$ et A soit une composante de ${}^p H^i(K_{w,t})$.

Il résulte de [Lu6, proposition 11.2 (c)] que

$$(18.5) \quad \text{FCar}(\mathbf{G}) = \coprod_{(s)} \text{FCar}(\mathbf{G}, (s)).$$

Bien sûr, les ensembles $\text{FCar}(\mathbf{G})$ et $\text{FCar}(\mathbf{G}, (s))$ ne dépendent pas des choix de \mathbf{T} , \mathbf{B} et \mathbf{T}^* . Nous utiliserons à loisir cette souplesse en fonction des questions que nous aborderons.

Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$, notons $\text{FCar}(\mathbf{G}, (s), a)$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères A sur \mathbf{G} tels qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$, $t \in (s) \cap \mathbf{T}^*$ et $w \in W$ tels que $w(t) = t$, $\bar{w} \sim a$ et A soit une composante de ${}^p H^i(K_{w,t})$. Ici, la notation $\bar{w} \sim a$ signifie que la classe \bar{w} de w dans $A_{\mathbf{G}^*}(t) \simeq A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est égale à a , l'isomorphisme entre $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ et $A_{\mathbf{G}^*}(t)$ étant induit par un élément conjuguant s en t . La proposition 18.4 montre que

$$(18.6) \quad \text{FCar}(\mathbf{G}, (s)) = \coprod_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)} \text{FCar}(\mathbf{G}, (s), a)$$

et que

$$(18.7) \quad \text{FCar}(\mathbf{G}, (s), a) = \{A \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s)) \mid \zeta_A = \omega_s(a)\}.$$

19. ACTION DE $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ SUR $\text{FCar}(\mathbf{G})$

Si $s \in \mathbf{T}^*$ et $w \in W$ sont tels que $w(s) = s$ et si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$, alors $(t_z^{\mathbf{G}})^* K_{w,s} \simeq K_{w,s}$. Cela montre en particulier que, si $A \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s))$, alors

$$(19.1) \quad (t_z^{\mathbf{G}})^* A \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s)).$$

De plus, si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$, alors $(t_z^{\mathbf{G}})^* A \simeq A$. Cela nous définit donc une action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur l'ensemble $\text{FCar}(\mathbf{G})$ ainsi que sur toutes les séries géométriques $\text{FCar}(\mathbf{G}, (s))$.

Le but de cette section est de décrire cette action via le processus d'induction des faisceaux-caractères. Nous nous restreindrons aux faisceaux-caractères apparaissant dans l'induit de faisceaux-caractères cuspidaux dont le support contient des éléments unipotents. Nous aurons pour cela besoin d'introduire des notions développées dans [Bon7, partie I].

19.A. Notations. Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi de \mathbf{G} , soit \mathbf{C} une classe unipotente et supposons que \mathbf{C} supporte un système local cuspidal \mathcal{E} . Soit \mathcal{L} un système local kummérien sur $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$. Posons $\mathcal{F} = \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{E}$. C'est un système local cuspidal sur $\Sigma = \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ \mathbf{C}$. Rappelons que l'existence d'un système local cuspidal supporté par \mathbf{C} implique que $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ stabilise \mathbf{C} et \mathcal{E} et donc stabilise Σ et \mathcal{F} (voir [Lu4, théorème 9.2 (b)]).

Soient $\mathbf{Z}(\mathbf{L})_{\text{rég}}^\circ = \{z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ \mid C_{\mathbf{G}}^\circ(z) = \mathbf{L}\}$ et $\Sigma_{\text{rég}} = \mathbf{Z}(\mathbf{L})_{\text{rég}}^\circ \mathbf{C}$. On note $\mathcal{L}_{\text{rég}}$ la restriction de \mathcal{L} à $\mathbf{Z}(\mathbf{L})_{\text{rég}}^\circ$ et $\mathcal{F}_{\text{rég}}$ la restriction de \mathcal{F} à $\Sigma_{\text{rég}}$. On a $\mathcal{F}_{\text{rég}} = \mathcal{L}_{\text{rég}} \boxtimes \mathcal{E}$. Posons $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})/\mathbf{L}$. Fixons maintenant $v \in \mathbf{C}$ et notons ζ le caractère irréductible du groupe $A_{\mathbf{L}}(v)$ associé à sa représentation sur \mathcal{E}_v par monodromie. Fixons aussi $x \in X(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, premier à p , tels que $\mathcal{L} = x^* \mathcal{L}_n$.

Si $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$, alors $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ si et seulement si $w(x/n) - x/n \in X(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ)$. Dans ce cas, nous notons \hat{w} la restriction de $w(x/n) - x/n$ à $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$. Alors il est facile de vérifier que \hat{w} est trivial sur $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$, c'est-à-dire que $\hat{w} \in X(\text{Ker } h_{\mathbf{L}})$. En composant avec κ , nous verrons \hat{w} comme un élément de $(\text{Ker } h_{\mathbf{L}})^\wedge$ (voir 1.8). L'application

$$\begin{array}{ccc} \omega_{\mathcal{L}} : W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) & \longrightarrow & (\text{Ker } h_{\mathbf{L}})^\wedge \\ w & \longmapsto & \hat{w} \end{array}$$

est un morphisme de groupes ne dépendant que de \mathcal{L} et non pas du choix de x et n . Nous noterons $W_{\mathbf{G}}^+(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ le noyau de $\omega_{\mathcal{L}}$. Par dualité, on obtient une application surjective

$$\hat{\omega}_{\mathcal{L}} : \text{Ker } h_{\mathbf{L}} \longrightarrow (W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})/W_{\mathbf{G}}^+(\mathbf{L}, \mathcal{L}))^\wedge.$$

19.B. Induction. Soit $A = IC(\overline{\Sigma}, \mathcal{F})[\dim \Sigma]$. C'est un faisceau-caractère cuspidal sur \mathbf{L} . Nous allons rappeler ici la construction du faisceau pervers induit de A . Pour cela, posons

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} \times \Sigma_{\text{rég}}, \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} \times_{\mathbf{L}} \Sigma_{\text{rég}} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \bigcup_{g \in \mathbf{G}} g \Sigma_{\text{rég}} g^{-1}.$$

Ici, $\mathbf{G} \times_{\mathbf{L}} \Sigma_{\text{rég}}$ désigne le quotient de $\mathbf{G} \times \Sigma_{\text{rég}}$ par l'action diagonale de \mathbf{L} par translation à droite sur le premier facteur et par conjugaison sur le deuxième. Notons $\alpha : \hat{\mathbf{Y}} \rightarrow \Sigma_{\text{rég}}$ la deuxième projection, $\beta : \hat{\mathbf{Y}} \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}$ la projection canonique et $\pi : \tilde{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathbf{Y}$ l'application telle que $\pi \circ \beta(g, x) = gxg^{-1}$.

Alors \mathbf{Y} est une sous-variété localement fermée lisse de \mathbf{G} , π est un revêtement étale galoisien de groupe $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \Sigma)$ et α et β sont des morphismes de variétés (voir [Lu4, §3] et [Bon7, §1]). Il existe alors un système local $\tilde{\mathcal{F}}_{\text{rég}}$ sur $\tilde{\mathbf{Y}}$ tel que $\alpha^* \mathcal{F}_{\text{rég}} \simeq \beta^* \tilde{\mathcal{F}}_{\text{rég}}$. Par conséquent, π étant un revêtement étale, $\pi_* \tilde{\mathcal{F}}_{\text{rég}}$ est un système local sur \mathbf{Y} . On a alors [Lu4, proposition 4.5]

$$(19.2) \quad \text{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A = IC(\overline{\mathbf{Y}}, \pi_* \tilde{\mathcal{F}}_{\text{rég}})[\dim \mathbf{Y}].$$

19.C. Algèbre d'endomorphismes. Comme dans [Bon7, §3], posons $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v)/C_{\mathbf{L}}^\circ(v)$ et $W_{\mathbf{G}}^\circ(\mathbf{L}, v) = (N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}) \cap C_{\mathbf{G}}^\circ(v))/C_{\mathbf{L}}^\circ(v)$. L'introduction du système local \mathcal{L} nous conduit à considérer les sous-groupes $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L})/C_{\mathbf{L}}^\circ(v)$ et $W_{\mathbf{G}}^\circ(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) = (N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \cap C_{\mathbf{G}}^\circ(v))/C_{\mathbf{L}}^\circ(v)$. Rappelons que $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v) = W_{\mathbf{G}}^\circ(\mathbf{L}, v) \times A_{\mathbf{L}}(v)$ (voir [Bon7, 5.3]). D'autre part, $A_{\mathbf{L}}(v)$ stabilise \mathcal{L} , donc est contenu dans $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L})$. Par suite

$$(19.3) \quad W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) = W_{\mathbf{G}}^\circ(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) \times A_{\mathbf{L}}(v).$$

Puisque $W_{\mathbf{G}}^\circ(\mathbf{L}, v) \simeq W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$, on a $W_{\mathbf{G}}^\circ(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) \simeq W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Par suite, si $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$, nous noterons \hat{w} un représentant de w choisi dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \cap C_{\mathbf{G}}^\circ(v)$.

Notons \mathcal{A} l'algèbre d'endomorphismes du faisceau pervers semi-simple $\text{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A$. Nous allons construire, en suivant [Lu4, proposition 3.5 et théorème 9.2] et [Bon7, §5 et 6], un isomorphisme entre \mathcal{A} et l'algèbre de groupe de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \simeq W_{\mathbf{G}}^\circ(\mathbf{L}, \mathcal{L})$.

Soit $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Soit τ'_w l'isomorphisme $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\text{int } \hat{w})^* \mathcal{E}$ qui induit l'identité sur \mathcal{E}_v . Soit σ_w l'isomorphisme $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} (\text{int } \hat{w})^* \mathcal{L}$ qui induit l'identité sur \mathcal{L}_1 . Alors $\theta'_w = \sigma_w \boxtimes \tau'_w$ est un isomorphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\text{int } \hat{w})^* \mathcal{F}$. Il lui correspond [Lu4, §3.4] un automorphisme Θ'_w de $\text{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A$.

Dans [Bon7, corollaires 6.2 et 6.7] a été construit un caractère linéaire $\gamma_{\mathbf{L},v,\zeta}^{\mathbf{G}} : W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L}, v) \rightarrow \{1, -1\}$. Nous noterons $\tau_w = \gamma_{\mathbf{L},v,\zeta}(w)\tau'_w$, $\theta_w = \gamma_{\mathbf{L},v,\zeta}^{\mathbf{G}}(w)\theta'_w$ et $\Theta_w = \gamma_{\mathbf{L},v,\zeta}^{\mathbf{G}}(w)\Theta'_w$. Compte tenu des choix qui ont été faits, il est facile de vérifier que l'application

$$\begin{array}{ccc} \Theta : & W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) & \longrightarrow \mathcal{A} \\ & w & \longmapsto \Theta_w \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Si η est un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$, nous noterons K_{η} le faisceau-caractère, composant irréductible de $\text{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A$, associé au caractère η grâce à l'isomorphisme de Lusztig Θ . En d'autres termes, $\text{Hom}(K_{\eta}, \text{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A)$ est un \mathcal{A} -module admettant η comme caractère. Notons que, si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}$, alors $(t_z^{\mathbf{L}})^* A \simeq A$, donc $(t_z^{\mathbf{G}})^* \text{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A \simeq \text{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A$. Par suite, on obtient une action de $\text{Ker } h_{\mathbf{L}}$ sur $\{K_{\eta} \mid \eta \in \text{Irr } W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})\}$, c'est-à-dire une action de $\text{Ker } h_{\mathbf{L}}$ sur $\text{Irr } W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de cette section, à savoir la description de cette action.

Théorème 19.4. *Soient $\eta \in \text{Irr } W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L})$ et soit $z \in \text{Ker } h_{\mathbf{L}}$. Notons \dot{z} un représentant de z dans $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}$. Alors*

$$(t_{\dot{z}}^{\mathbf{G}})^* K_{\eta} \simeq K_{\eta \hat{\omega}_{\mathcal{L}}(z)}.$$

DÉMONSTRATION - Nous reprenons ici les constructions de [Bon7, §5 et 6]. Mais nous devons tenir compte du système local \mathcal{L} (qui, dans [Bon7], était supposé constant). Il nous faut donc les modifier légèrement en introduisant le revêtement étale de $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}$ qui trivialise le système local \mathcal{L} .

Soit

$$\mathbf{Z}_{x,n} = \{(z, \xi) \in \mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ} \mid x(z) = \xi^n\}.$$

Alors la première projection $p_1 : \mathbf{Z}_{x,n} \rightarrow \mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}$ est un revêtement étale de groupe $\mu_n(\mathbb{F})$: le système local \mathcal{L} est celui associé à ce revêtement et au caractère κ de $\mu_n(\mathbb{F})$. Notons $\mathbf{Z}_{x,n,\text{rég}}$ l'image inverse de $\mathbf{Z}(\mathbf{L})_{\text{rég}}^{\circ}$ dans $\mathbf{Z}_{x,n}$. Posons

$$\tilde{\mathbf{Y}}'_{x,n} = \mathbf{G}/C_{\mathbf{L}}^{\circ}(v) \times \mathbf{Z}_{x,n,\text{rég}}.$$

Comme dans [Bon7, §3.A], posons

$$\tilde{\mathbf{Y}}' = \mathbf{G}/C_{\mathbf{L}}^{\circ}(v) \times \mathbf{Z}(\mathbf{L})_{\text{rég}}^{\circ}$$

et notons $\tilde{f} : \tilde{\mathbf{Y}}' \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}$ l'application naturelle. Soit $\tilde{f}^+ : \tilde{\mathbf{Y}}'_{x,n} \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}$ l'application définie par composition de $\text{Id}_{\mathbf{G}/C_{\mathbf{L}}^{\circ}(v)} \times p_1$. Notons $\pi^+ = \pi \circ \tilde{f}^+$.

Le groupe $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) \times \mu_n(\mathbb{F})$ agit à droite sur $\tilde{\mathbf{Y}}'_{x,n}$ de la façon suivante : si $(w, \xi) \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) \times \mu_n(\mathbb{F})$ et si $(gC_{\mathbf{L}}^{\circ}(v), z, \xi') \in \tilde{\mathbf{Y}}'_{x,n}$, on note $\lambda_w = w(x/n) - x/n \in X(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ})$ et on pose

$$(gC_{\mathbf{L}}^{\circ}(v), z, \xi') \cdot (w, \xi) = (g\dot{w}C_{\mathbf{L}}^{\circ}(v), \dot{w}^{-1}z\dot{w}, \lambda_w(z)\xi\xi').$$

Il est alors facile de vérifier, en utilisant [Bon7, §3.A], que $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) \times \mu_n(\mathbb{F})$ agit librement sur $\tilde{\mathbf{Y}}'_{x,n}$.

Fixons maintenant $z \in \text{Ker } h_{\mathbf{L}}$ et notons \dot{z} un représentant de z dans $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}$. Soit $z_1 \in \mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}$ tel que $z_1^n = z$. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} t_1 : & \tilde{\mathbf{Y}}'_{x,n} & \longrightarrow \tilde{\mathbf{Y}}'_{x,n} \\ & (gC_{\mathbf{L}}^{\circ}(v), z', \xi) & \longmapsto (gC_{\mathbf{L}}^{\circ}(v), z z', x(z_1)\xi) \end{array}$$

est un automorphisme de variétés vérifiant $\pi^+ \circ t_1 = t_{\dot{z}}^{\mathbf{G}} \circ \pi^+$. Le théorème 19.4 découle immédiatement de ces remarques et du fait que, si $w \in W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L})$, alors

$$t_1^{-1}(t_1((gC_{\mathbf{L}}^{\circ}(v), z', \xi) \cdot w)) = (g\dot{w}C_{\mathbf{L}}^{\circ}(v), \dot{w}^{-1}z'\dot{w}, \lambda_w(z_1^{-1}w^{-1}z_1w)\xi)$$

et $\kappa \circ \lambda_w(z_1^{-1}w^{-1}z_1w) = \omega_{\mathcal{L}}(w)(z) = \hat{\omega}_{\mathcal{L}}(z)(w)$. ■

19.D. Un analogue du théorème 13.12 pour les faisceaux-caractères. Posons

$$W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) = \{(w, \mu) \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \times \mathcal{Z}(\mathbf{G})^{\wedge} \mid \hat{\omega}_{\mathcal{L}}(w) = \text{Res}_{\text{Ker } h_{\mathbf{L}}}^{\mathcal{Z}(\mathbf{G})} \mu\}.$$

Alors l'application $W_{\mathbf{G}}^+(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \rightarrow W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$, $w \mapsto (w, 1)$ est un morphisme de groupe injectif qui nous permettra d'identifier $W_{\mathbf{G}}^+(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ avec un sous-groupe de $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. De plus, l'application $\omega'_{\mathcal{L}} : W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})^{\wedge}$, $(w, \mu) \mapsto \mu$ est un morphisme de groupes dont le noyau est $W_{\mathbf{G}}^+(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Nous noterons $\hat{\omega}'_{\mathcal{L}} : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow (W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})/W_{\mathbf{G}}^+(\mathbf{L}, \mathcal{L}))^{\wedge}$ le morphisme dual.

D'autre part, l'application $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \rightarrow W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$, $\mu \mapsto (1, \mu \circ h_\mathbf{L})$ est aussi un morphisme injectif de groupes : nous identifierons $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$ avec le sous-groupe correspondant de $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Alors l'application $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \rightarrow W_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$, $(w, \mu) \mapsto w$ est surjective et son noyau est $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$. En d'autres termes,

$$(19.5) \quad W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) / \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \simeq W_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L}).$$

Pour finir, notons que $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$ est central dans $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Résumons tout ceci dans le diagramme suivant, dans lequel toutes les suites verticales ou horizontales sont exactes et tous les carrés sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & W_\mathbf{G}^+(\mathbf{L}, \mathcal{L}) & \xlongequal{\quad} & W_\mathbf{G}^+(\mathbf{L}, \mathcal{L}) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge & \longrightarrow & W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) & \longrightarrow & W_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow \omega'_\mathcal{L} & & \downarrow \omega_\mathcal{L} \\
 1 & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge & \longrightarrow & (\text{Ker } h_\mathbf{L})^\wedge \longrightarrow 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Soit η un caractère irréductible de $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Notons z_η l'élément de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ (vu comme un caractère linéaire de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$) par lequel $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$ agit sur la représentation de $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ associée à η . Notons \tilde{z}_η un élément de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ tel que $h_\mathbf{L}(\tilde{z}_\eta) = z_\eta$. Nous verrons \tilde{z}_η comme un caractère linéaire de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$, c'est-à-dire comme un caractère linéaire de $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Posons

$$(19.6) \quad K_\eta = (t_{\tilde{z}_\eta}^\mathbf{G})^* K_{\eta \hat{\omega}'_\mathcal{L}(\tilde{z}_\eta)^{-1}}.$$

Remarquons tout d'abord que cette notation a un sens. Premièrement, $\eta \hat{\omega}'_\mathcal{L}(\tilde{z}_\eta)^{-1}$ est trivial sur $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$ donc peut être vu comme un caractère irréductible de $W_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ d'après 19.5. D'autre part, en vertu du théorème 19.4, le membre de droite ne dépend pas du choix de \tilde{z}_η . On a donc montré le résultat suivant :

Proposition 19.7. *L'application $\eta \mapsto K_\eta$ est une bijection entre $\text{Irr } W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ et l'ensemble des composantes irréductibles de $\text{Ind}_\mathbf{L}^\mathbf{G} \left(\bigoplus_{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})} (t_z^\mathbf{L})^* A \right)$. De plus*

$$\text{Ind}_\mathbf{L}^\mathbf{G} \left(\bigoplus_{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})} (t_z^\mathbf{L})^* A \right) = \bigoplus_{\eta \in \text{Irr } W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})} K_\eta^{\oplus \eta(1)}.$$

La proposition 19.7 suggère fortement qu'il doit exister un isomorphisme naturel entre l'algèbre d'endomorphismes du faisceau pervers $\text{Ind}_\mathbf{L}^\mathbf{G} \left(\bigoplus_{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})} (t_z^\mathbf{L})^* A \right)$ et l'algèbre de groupes de $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Nous allons ici le construire. Pour cela, posons $A' = \bigoplus_{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})} (t_z^\mathbf{L})^* A$ et notons \mathcal{L}' le système local $\bigoplus_{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})} (t_z^\mathbf{L})^* \mathcal{L}$ sur $\mathbf{Z}(\mathbf{L})$.

Soit $(w, \mu) \in W'_\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. On a construit un isomorphisme $\sigma_w : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} (\text{int } \dot{w})^* \mathcal{L}$. Si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$, la preuve du théorème 19.4 montre que l'action de $(\sigma_w)_z$ sur \mathcal{L}_z est $\hat{\omega}_\mathcal{L}(w)(z) \text{Id}_{\mathcal{L}_z} = \mu(z) \text{Id}_{\mathcal{L}_z}$. Par suite, il existe un unique isomorphisme $\sigma_{w, \mu} : \mathcal{L}' \xrightarrow{\sim} (\text{int } \dot{w})^* \mathcal{L}'$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$, on ait $(\sigma_w)_z = \mu(z) \text{Id}_{\mathcal{L}'_z}$. Par tensorisation avec τ_w , on obtient un isomorphisme $\theta_{w, \mu} : \mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} (\text{int } \dot{w})^* \mathcal{F}'$, où $\mathcal{F}' = \mathcal{L}' \boxtimes \mathcal{E}$.

À travers le diagramme d'induction, $\theta_{w, \mu}$ induit un automorphisme $\Theta_{w, \mu}$ du faisceau pervers $\text{Ind}_\mathbf{L}^\mathbf{G} A'$. Si on note \mathcal{A}' l'algèbre d'endomorphisme de $\text{Ind}_\mathbf{L}^\mathbf{G} A'$, alors :

Théorème 19.8. *L'application*

$$\begin{aligned} \Theta : \quad \overline{\mathbb{Q}}_\ell W'_G(\mathbf{L}, \mathcal{L}) &\longrightarrow \mathcal{A}' \\ (w, \mu) &\longmapsto \Theta_{w, \mu} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres. Si η est un caractère irréductible de $W'_G(\mathbf{L}, \mathcal{L})$, alors la composante irréductible de $\text{Ind}_{\mathbf{L}}^G A'$ associée à η à travers l'isomorphisme Θ est K_η .

20. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Nous allons maintenant introduire dans ce chapitre l'isogénie F . Un faisceau pervers A sur \mathbf{G} sera dit F -stable s'il est isomorphe à F^*A . Nous noterons $\text{FCar}(\mathbf{G})^F$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères F -stables. Si A est un faisceau pervers F -stable sur \mathbf{G} et si $\varphi : A \xrightarrow{\sim} F^*A$ est un isomorphisme, nous noterons $\mathcal{X}_{A, \varphi} : \mathbf{G}^F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ la *fonction caractéristique* de A , définie par

$$\mathcal{X}_{A, \varphi}(g) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{Tr}(\varphi_x, \mathcal{H}_x^i A)$$

pour tout $g \in \mathbf{G}^F$. Bien sûr, $\mathcal{X}_{A, \varphi}$ dépend de φ . Cependant, si A est irréductible, alors φ est bien déterminée à un scalaire près. En conséquence, la fonction $\mathcal{X}_{A, \varphi}$ est bien déterminée par A à un scalaire près.

20.A. Cas classique. Reprenons les notations de la section précédente $(\mathbf{L}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \dots)$. Supposons donc maintenant que \mathbf{L} est F -stable, que \mathbf{T} est F -stable, que $F(v) = v$ et que $F^*\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$. Fixons un isomorphisme $\varphi : F^*\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$. Cet isomorphisme s'étend en un isomorphisme $\varphi^\# : F^*A \xrightarrow{\sim} A$. Soit g_w un élément de \mathbf{G} tel que $g_w^{-1}F(g_w) = w^{-1}$. Posons

$$\mathbf{L}_w = {}^{g_w}\mathbf{L}, \quad v_w = {}^{g_w}v, \quad \mathbf{C}_w = {}^{g_w}\mathbf{C}, \quad \Sigma_w = {}^{g_w}\Sigma,$$

$$\mathcal{L}_w = (\text{ad } g_w^{-1})^*\mathcal{L}, \quad \mathcal{E}_w = (\text{ad } g_w^{-1})^*\mathcal{E}, \quad \mathcal{F}_w = (\text{ad } g_w^{-1})^*\mathcal{F} \quad \text{et} \quad A_w = (\text{ad } g_w^{-1})^*A.$$

Alors $\mathcal{F}_w = \mathcal{L}_w \boxtimes \mathcal{E}_w$. Alors $\mathbf{L}_w, v_w, \mathbf{C}_w, \Sigma_w, \mathcal{L}_w, \mathcal{E}_w, \mathcal{F}_w$ et A_w sont F -stables et, suivant la construction de [Lu8, §9.3], on obtient un isomorphisme $\varphi_w : F^*\mathcal{F}_w \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_w$. Il s'étend en un isomorphisme $\varphi_w^\# : F^*A_w \xrightarrow{\sim} A_w$.

Fixons maintenant un caractère F -stable η de $W_G(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. On note ϕ l'automorphisme de $W_G(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ induit par F . On choisit une extension $\tilde{\eta}$ de η au produit semi-direct $W_G(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \rtimes \langle \phi \rangle$. Ce choix d'une extension (ainsi que celui de φ) détermine un isomorphisme $\varphi_{\tilde{\eta}} : F^*K_\eta \xrightarrow{\sim} K_\eta$. Il résulte de [Lu6, partie II, 10.4.5 and 10.6.1] et [Lu8, proposition 9.2] que :

Théorème 20.1 (Lusztig). *Supposons p presque bon pour \mathbf{G} et q assez grand. Avec les notations précédentes, on a*

$$\mathcal{X}_{K_\eta, \varphi_{\tilde{\eta}}} = \frac{1}{|W_G(\mathbf{L}, \mathcal{L})|} \sum_{w \in W_G(\mathbf{L}, \mathcal{L})} \tilde{\eta}(w\phi) R_{\mathbf{L}_w}^G \mathcal{X}_{A_w, \varphi_w}.$$

20.B. Translation par $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Nous allons étudier ici le comportement des fonctions caractéristiques vis-à-vis de la translation par un élément du centre. Cela sera fait en termes du paramétrage de la proposition 19.7.

Le système local \mathcal{L} étant F -stable, il en est de même du système local \mathcal{L}' sur $\mathbf{Z}(\mathbf{L})$. De même, le système local \mathcal{F}' est F -stable. On fixe un isomorphisme $\varphi' : F^*\mathcal{F}' \simeq \mathcal{F}'$ étendant φ .

Soit $(w, \mu) \in W'_G(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Dans la sous-section 19.D, nous avons construit un isomorphisme $\theta_{w, \mu} : \mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} (\text{int } w)^*\mathcal{F}'$. Reprenons les notations de la précédente sous-section et posons $\mathcal{L}'_w = (\text{int } g_w^{-1})^*\mathcal{L}'$, $\mathcal{F}'_w = (\text{int } g_w^{-1})^*\mathcal{F}'$ et $A'_w = (\text{int } g_w^{-1})^*A'$. En suivant encore [Lu8, §9.3], on obtient un isomorphisme $\varphi'_{w, \mu} : F^*\mathcal{F}'_w \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'_w$. Cet isomorphisme s'étend en un isomorphisme $\varphi'^{\#}_{w, \mu} : F^*A'_w \xrightarrow{\sim} A'_w$.

Fixons maintenant un caractère irréductible η de $W'_G(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Alors K_η est F -stable si et seulement si η est F -stable. Notons $\tilde{\eta}$ une extension de η au produit semi-direct $W'_G(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \rtimes \langle \phi \rangle$, où ϕ est l'automorphisme de $W'_G(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ induit par F . Comme dans le cas classique, le choix de $\tilde{\eta}$ détermine un isomorphisme $\varphi_{\tilde{\eta}} : F^*K_\eta \xrightarrow{\sim} K_\eta$. Le théorème suivant découle presque immédiatement du théorème de Lusztig précédent.

Théorème 20.2. *Supposons p presque bon pour \mathbf{G} et q assez grand. On a*

$$\mathcal{X}_{K_\eta, \varphi_{\tilde{\eta}}} = \frac{1}{|W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})|} \sum_{(w, \mu) \in W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})} \tilde{\eta}((w, \mu)\phi) R_{\mathbf{L}_w}^{\mathbf{G}} \mathcal{X}_{A'_w, \varphi'_{w, \mu}}.$$

DÉMONSTRATION - Notons $z = z_\eta \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})$. Puisque η est F -stable, on a $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})^F$. L'algèbre d'endomorphisme du faisceau pervers $\text{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(t_z^{\mathbf{L}})^* A$ s'identifie, via la construction précédente, à la sous-algèbre de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ égale à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) e_z$, où e_z est l'idempotent central $\frac{1}{|\mathcal{Z}(\mathbf{L})|} \sum_{\tau \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge} \tau(z)^{-1} \tau$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lusztig en remarquant que la restriction de $\mathcal{X}_{A'_w, \varphi'_{w, \mu}}$ à $z \overline{\Sigma}_w^F$ est égale à

$$\frac{1}{|\mathcal{Z}(\mathbf{L})|} \sum_{\tau \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge} \tau(z)^{-1} \mathcal{X}_{A'_w, \varphi'_{w, \mu} \tau}. \blacksquare$$

21. ÉLÉMENTS UNIPOTENTS RÉGULIERS

Hypothèse : *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous supposons que p est bon pour \mathbf{G} .*

Nous nous intéressons ici aux faisceaux-caractères apparaissant dans l'induit, à partir d'un sous-groupe de Levi \mathbf{L} de \mathbf{G} , de faisceaux-caractères cuspidaux dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{L}) \mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{L}}$. On rappelle que, puisque p est supposé bon pour \mathbf{G} , le groupe $A_{\mathbf{L}}(u_{\mathbf{L}})$ est isomorphe à $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$. Si $\zeta \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$, nous noterons \mathcal{E}_ζ le système local \mathbf{L} -équivariant sur $\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{L}}$ tel que l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ sur la fibre en $u_{\mathbf{L}} \in \mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{L}}$ se fasse par le caractère ζ . Si $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})$, on notera \dot{z} un représentant de z dans $\mathbf{Z}(\mathbf{L})$. En d'autres termes, $z = \dot{z} \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$.

21.A. Cuspidalité. Fixons un système local kummérien \mathcal{L} sur $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$, un élément $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et un caractère linéaire ζ de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Posons $\mathcal{F} = ((t_z^{\mathbf{G}})^* \mathcal{L}) \boxtimes \mathcal{E}_\zeta$.

Proposition 21.1. *\mathcal{F} est un système local cuspidal si et seulement si $\zeta \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$.*

DÉMONSTRATION - voir [Bon5, proposition 1.2.2]. \blacksquare

Soit $\text{FCar}_{\text{rég}}^{\text{cus}}(\mathbf{G})$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères cuspidaux dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Soit $\text{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$ un ensemble de représentants (modulo l'action naturelle de \mathbf{G}) des triplets (s, a, τ) , où s est un élément semi-simple de \mathbf{G}^* , $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est tel que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ et $\tau \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^\wedge$. Nous allons construire une bijection entre $\text{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$ et $\text{FCar}_{\text{rég}}^{\text{cus}}(\mathbf{G})$.

Soit $(s, a, \tau) \in \text{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$. On peut supposer, et nous le ferons, que $s \in \mathbf{T}^*$. Par construction, l'élément s est géométriquement cuspidal et donc $\omega_s : A_{\mathbf{G}^*}(s) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ est un isomorphisme (voir proposition 7.1 (e)). En particulier, $\hat{\omega}_s : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)^\wedge$ est aussi un isomorphisme. Posons $z = \hat{\omega}_s^{-1}(\tau)$ et notons $\mathcal{L}_{s, z}$ la restriction de \mathcal{L}_s à $z^{-1} = \dot{z}^{-1} \mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$. Posons maintenant

$$\mathcal{F}_{s, a, \tau} = \mathcal{F}_{s, a, \tau}^{\mathbf{G}} = \mathcal{L}_{s, z} \boxtimes \mathcal{E}_{\omega_s(a)}.$$

Notons que $\mathcal{L}_{s, z} \simeq (t_z^{\mathbf{G}})^* \mathcal{L}_{s, 1}$. C'est un système local \mathbf{G} -équivariant irréductible cuspidal sur la variété lisse $z^{-1} \mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}} = \dot{z}^{-1} \mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ \mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Posons

$$A_{s, a, \tau} = A_{s, a, \tau}^{\mathbf{G}} = \overline{IC(z^{-1} \mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}, \mathcal{F}_{s, a, \tau})} [\dim \mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ \mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}].$$

C'est un faisceau pervers \mathbf{G} -équivariant irréductible sur \mathbf{G} .

Lemme 21.2. *Soit $(s, a, \tau) \in \text{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$.*

- (a) $\zeta_{A_{s, a, \tau}} = \omega_s(a)$.
- (b) $A_{s, a, \tau}$ est l'extension par zéro du système local $\mathcal{E}_{s, a, \tau}$.
- (c) $A_{s, a, \tau} \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s))$.
- (d) $A_{s, a, \tau}$ est cuspidal.

DÉMONSTRATION - Soit $(s, a, \tau) \in \text{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$. Rappelons que l'existence de (s, a, τ) implique que toutes les composantes quasi-simples de \mathbf{G} sont de type A . Posons $\zeta = \omega_s(a)$ et $z = \hat{\omega}_s^{-1}(\tau)$.

(a) découle du fait que $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ agit sur \mathcal{E}_ζ via le caractère linéaire ζ .

(b) Soit x un élément de l'adhérence de $z\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$ n'appartenant pas à $z\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Puisque toutes les composantes quasi-simples de \mathbf{G} sont de type A , ceci implique qu'il existe un sous-groupe de Levi \mathbf{L} propre de \mathbf{G} contenant x . En particulier, $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ \subset C_{\mathbf{G}}^\circ(x)$. Donc $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$ agit trivialement sur la fibre en x de $A_{s,a,\tau}$. Par suite, si cette fibre est non nulle, la restriction de ζ à $\text{Ker } h_{\mathbf{L}}$ est triviale, ce qui contredit la proposition 21.1. Donc $(A_{s,a,\tau})_x = 0$.

(c) Rappelons que toutes les composantes quasi-simples de \mathbf{G} sont de type A . La classification des éléments quasi-isolés réguliers [Bon8] montre que, quitte à conjuguer le triplet (s, a, τ) , on peut supposer que $s \in \mathbf{T}^*$ et que a est un élément de Coxeter standard de W . Nous allons calculer $K_{a,s}$ dans ces conditions.

Tous les éléments de \mathbf{BaB} sont réguliers et \mathbf{BaB} rencontre toutes les classes de conjugaison d'éléments réguliers [St4, remarque 8.8]. La proposition 18.4 et l'argument du (b) montre que le support de $A_{s,a,\tau}$ est contenu dans $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Notons $i : \mathbf{Z}(\mathbf{G})\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}} \hookrightarrow \mathbf{G}$, $\tilde{\mathbf{Y}}$ l'image inverse de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$ dans $\tilde{\mathbf{Y}}_a$, $\gamma : \tilde{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathbf{Z}(\mathbf{G})\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$ la restriction de γ_a et $\tilde{\mathcal{L}}$ la restriction de $\tilde{\mathcal{L}}_{a,s}$ à $\tilde{\mathbf{Y}}$. On a alors

$$(*) \quad K_{a,s} = i_! R\gamma_! \tilde{\mathcal{L}}.$$

Fixons un élément unipotent régulier $x \in \mathbf{Ba} \cap a\mathbf{B}^- \cap \mathcal{U}_{\text{rég}}$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \times \mathbf{Z}(\mathbf{G}) &\longrightarrow \tilde{\mathbf{Y}} \\ (g\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t) &\longmapsto (tgxg^{-1}, g\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que φ est un morphisme de variété bijectif purement inséparable. On a construit une action de \mathbf{G} sur $\tilde{\mathbf{Y}}_a$. Le groupe $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ agit aussi sur $\tilde{\mathbf{Y}}_a$ par translation de la première coordonnée. Cette action conserve $\tilde{\mathbf{Y}}$. Cela munit $\tilde{\mathbf{Y}}$ d'une action de $\mathbf{G} \times \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. On remarque alors que φ est $\mathbf{G} \times \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ équivariant. Il suffit donc de montrer que φ est bijectif. En effet, cela montre que la variété $\tilde{\mathbf{Y}}$ est une orbite sous l'action d'un groupe algébrique, donc elle est lisse, donc elle est normale et un morphisme bijectif entre variétés normales est purement inséparable [Bor, théorème 18.2].

Soient $(g\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t)$ et $(g'\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t')$ deux éléments de $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \times \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ ayant même image par φ . Alors la partie semi-simple de $tgxg^{-1}$ coïncide avec celle de $t'g'xg'^{-1}$, c'est-à-dire $t = t'$. On a par conséquent $g^{-1}g' \in \mathbf{B} \cap C_{\mathbf{G}}(x)$. Mais, d'après [Bon7, corollaire 10.3], $\mathbf{U} \cap C_{\mathbf{G}}(x) = 1$ donc la partie unipotente de $g^{-1}g'$ est égale à 1. Donc, puisque x est un unipotent régulier, on en déduit que $g\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = g'\mathbf{Z}(\mathbf{G})$, ce qui montre l'injectivité de φ .

Montrons maintenant la surjectivité de φ . Soit $(g, h\mathbf{B}) \in \tilde{\mathbf{Y}}$. Alors, par définition, il existe $t \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et $y \in \mathbf{G}$ tels que $g = tyxy^{-1}$. Posons $k = h^{-1}y$. Alors, par hypothèse, $kxk^{-1} \in \mathbf{BaB} \cap \mathcal{U}_{\text{rég}}$. Donc, d'après [Bon7, corollaire 10.3] et [St4, théorème 1.4], il existe $b \in \mathbf{B}$ tel que $kxk^{-1} = bxb^{-1}$. En d'autres termes, $yxy^{-1} = hbxb^{-1}h^{-1}$. Donc $(g, h\mathbf{B}) = \varphi(hb\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t)$.

Posons $\tilde{\mathcal{L}}' = \varphi^* \tilde{\mathcal{L}}$. Puisque φ est bijectif et purement inséparable, on a $\varphi_* \tilde{\mathcal{L}}' = \tilde{\mathcal{L}}$ et donc

$$K_{a,s} = i_! R\gamma'_! \tilde{\mathcal{L}}',$$

où $\gamma' : \mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \times \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbf{Z}(\mathbf{G})\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$, $(g\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t) \mapsto tgxg^{-1}$. Alors $\tilde{\mathcal{L}}' = \tilde{\mathcal{E}} \boxtimes (\oplus_{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})} \mathcal{L}_{s,z})$, où $\tilde{\mathcal{E}}$ est un système local \mathbf{G} -équivariant irréductible sur $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})$. L'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur $\tilde{\mathcal{E}}$ étant donnée par ζ , $\tilde{\mathcal{E}}$ est l'unique système local sur $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ sur lequel $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ agit par ζ . Pour $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})$, notons $i_z : z\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}} \hookrightarrow \mathbf{G}$. Notons $\delta : \mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$, $g\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \mapsto gvg^{-1}$ et $\mathcal{E} = R\delta_! \tilde{\mathcal{E}}$. Alors

$$K_{a,s} = \bigoplus_{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})} i_{z!} (\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{L}_{s,z}).$$

Il nous reste à calculer \mathcal{E} . En décomposant δ en la suite de morphismes $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \xrightarrow{\delta'} \mathbf{G}/C_{\mathbf{G}}(u) \rightarrow \mathcal{U}_{\text{rég}}$, on est ramené au calcul de $R\delta'_! \tilde{\mathcal{E}}$. Mais, puisque δ' est un morphisme lisse dont les fibres sont isomorphes à $C_{\mathbf{U}}(u)$, qui est, comme variété algébrique, un espace affine de dimension $\text{rg}_{\text{sem}}(\mathbf{G})$, on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\zeta[-2 \text{rg}_{\text{sem}}(\mathbf{G})].$$

On en déduit que

$$(21.3) \quad K_{a,s} = \bigoplus_{\tau \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^\wedge} A_{s,a,\tau}[m],$$

pour un $m \in \mathbb{Z}$ que je n'ai pas envie de calculer. Cela montre (c).

(d) est évident. ■

Proposition 21.4. *L'application $\text{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G}) \rightarrow \text{FCar}_{\text{rég}}^{\text{cus}}(\mathbf{G})$, $(s, a, \tau) \mapsto A_{s,a,\tau}$ est bijective. De plus, $A_{s,a,\tau} \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s))$.*

DÉMONSTRATION - Soit $(s, a, \tau) \in \text{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$. Alors $\mathcal{E}_{s,a,\tau}$ est un système local cuspidal sur $z\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\wedge}$ (voir [Lu4, définition 2.4] et proposition 21.1). Par suite, $A_{s,a,\tau}$ est un faisceau-caractère cuspidal [Lu6, §7] dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\text{G}}$. Cela montre que l'application est bien définie.

Montrons qu'elle est surjective. Soit $A \in \text{FCar}_{\text{rég}}^{\text{cus}}(\mathbf{G})$. D'après [Lu6, §7], il existe $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})$, un système local \mathcal{L} sur $z = z\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ}$ et $\zeta \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})_{\text{cus}}^{\wedge}$ tel que $A = IC(\overline{z\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\text{G}}}, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{F}_{\zeta})[\text{rg } \mathbf{G}]$. En effet, puisque \mathbf{G} est de type A, les éléments semi-simples isolés sont centraux et les éléments unipotents distingués sont réguliers. Notons que $\zeta_A = \zeta$.

Soit s tel que $A \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s))$ (voir 18.5). Il existe $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ tel que $w(s) = s$ et A est une composante irréductible de ${}^p H^i(K_{w,s})$. Notons a la classe de w dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. D'après la proposition 18.4, on a $\zeta = \omega_s(a)$. Posons maintenant $\tau = \hat{\omega}_s(z) \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{\wedge}$. Puisque $A \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s))$, la restriction de \mathcal{L}_s à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ}$ est égale à $t_z^* \mathcal{L}$, où $t_z : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$, $g \mapsto zg$ est la translation par z . Donc $\mathcal{L}_{s,z} = \mathcal{L}$, ce qui montre que $A = A_{s,a,\tau}$.

Montrons maintenant qu'elle est injective. Soient (s, a, τ) et (s', a', τ') deux éléments de $\text{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$ tels que $A_{s,a,\tau} \simeq A_{s',a',\tau'}$. D'après 18.5 et le lemme 21.2 (c), s et s' sont conjugués sous \mathbf{G}^* . On peut donc supposer qu'ils sont égaux. De plus, $\zeta_{A_{s,a,\tau}} = \zeta_{A_{s',a',\tau'}}$ donc, d'après la proposition 18.4, on a $\omega_s(a) = \omega_s(a')$. Donc $a = a'$ car ω_s est injectif. Pour finir, les supports de $A_{s,a,\tau}$ et $A_{s,a,\tau'}$ sont égaux, ce qui implique que $\hat{\omega}_s^{-1}(\tau) = \hat{\omega}_s^{-1}(\tau')$, d'où l'on déduit que $\tau = \tau'$. ■

21.B. Induction. Fixons un élément semi-simple $s \in \mathbf{T}^*$ et un élément $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Posons $\mathbf{L}_{s,a} = C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^a)^{\circ})$. Alors, d'après la proposition 8.10, $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^{\wedge}(\mathbf{L}_{s,a})$. Notons $\text{FCar}_{\text{rég}}(\mathbf{G}, (s), a)$ l'ensemble des faisceaux-caractères apparaissant dans $\text{Ind}_{\mathbf{L}_{s,a}}^{\mathbf{G}} \left(\bigoplus_{\tau \in A_{\mathbf{L}_{s,a}}^*(s)^{\wedge}} A_{s,a,\tau}^{\mathbf{L}} \right)$. Il est à noter que $\text{FCar}_{\text{rég}}(\mathbf{G}, (s), a)$

est contenu dans $\text{FCar}(\mathbf{G}, (s), a)$. Alors, d'après la proposition 19.7, on a une bijection

$$(21.5) \quad \text{Irr } W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a}, \mathcal{L}_{s,a}) \xrightarrow{\sim} \text{FCar}_{\text{rég}}(\mathbf{G}, (s), a),$$

où $\mathcal{L}_{s,a}$ désigne la restriction de \mathcal{L}_s à $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_{s,a})^{\circ}$. Il nous reste à déterminer le groupe $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a}, \mathcal{L}_{s,a})$. C'est fait dans la proposition suivante (comparer avec la proposition 16.2).

Proposition 21.6. *Si $s \in \mathbf{T}^*$ et $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$, alors $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a}, \mathcal{L}_{s,a})$ est canoniquement isomorphe à $W(s)^a \simeq A_{\mathbf{G}^*}(s) \ltimes W^{\circ}(s)^a$. A travers cet isomorphisme, on a $A_{\mathbf{L}_{s,a}}^*(s) \simeq \mathcal{Z}(\mathbf{L}_{s,a})^{\wedge}$ et $W(s)^a / A_{\mathbf{L}_{s,a}}^*(s) \simeq W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a}, \mathcal{L}_{s,a})$.*

DÉMONSTRATION - Soit $w \in W(s)^a$. Alors w normalise $\mathbf{L}_{s,a}$ et $\mathcal{L}_{s,a}$. Posons

$$\begin{aligned} \aleph : W(s)^a &\longrightarrow W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a}, \mathcal{L}_{s,a}) \\ w &\longmapsto (\tilde{w}, \omega_s(\bar{w})), \end{aligned}$$

où \tilde{w} désigne la classe de w dans $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a})$ et \bar{w} la classe de w dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Nous allons montrer que \aleph est un isomorphisme.

Le fait que l'application \aleph est bien définie découle immédiatement de la construction de ω_s et de la définition de $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a}, \mathcal{L}_{s,a})$. Soit $w \in W(s)^a$ tel que $\aleph(w) = (1, 1)$. Alors $w \in W_{\mathbf{L}_{s,a}}(s)^a = A_{\mathbf{L}_{s,a}}^*(s)$ car s est géométriquement cuspidal dans $\mathbf{L}_{s,a}^*$ donc régulier (voir les propositions 8.10 et 8.9). Mais alors $\omega_s(w) = 1$ et donc $w = 1$ d'après l'injectivité de ω_s . Cela montre l'injectivité de \aleph .

Il nous reste à montrer la surjectivité. Soit $(w, \mu) \in W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a}, \mathcal{L}_{s,a})$. Soit \dot{w} un représentant de w dans W . Il résulte de 18.5 (appliqué au groupe $\mathbf{L}_{s,a}$) que l'on peut supposer que $\dot{w} \in W(s)$. Il est alors facile de vérifier que

$$(21.7) \quad \omega_{\mathcal{L}_{s,a}}(w) = \text{Res}_{\text{Ker } h_{\mathbf{L}}}^{\mathcal{Z}(\mathbf{G})} \omega_s(\dot{w}).$$

Donc $\text{Res}_{\text{Ker } h_{\mathbf{L}}}^{\mathcal{Z}(\mathbf{G})} \mu = \text{Res}_{\text{Ker } h_{\mathbf{L}}}^{\mathcal{Z}(\mathbf{G})} \omega_s(\dot{w})$. Puisque $A_{\mathbf{L}_{s,a}}^*(s) \simeq \mathcal{Z}(\mathbf{L}_{s,a})^{\wedge}$, il existe $a \in A_{\mathbf{L}_{s,a}}^*(s)$ tel que $\mu = \omega_s(\dot{w})\omega_s(a) = \omega_s(\dot{w}a)$. Quitte à changer de représentant de w dans $W(s)^a$, on peut donc supposer que $\omega_s(\dot{w}) = \mu$. Notons b la classe de \dot{w} dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors $w' = b^{-1}\dot{w} \in W^{\circ}(s)$ et normalise $\mathbf{L}_{s,a}$. Donc,

d'après le corollaire 8.11 (e), $aw' = w'a$ et donc $aw = wa$. Par suite, $w \in W(s)^a$ et $\aleph(w) = (w, \mu)$, ce qui montre la surjectivité de \aleph . ■

22. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Le but de cette section est de calculer les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères F -stables appartenant à $\text{FCar}_{\text{rég}}(\mathbf{G}, (s), a)$, où s est un élément semi-simple de \mathbf{G}^* et $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Tout d'abord, remarquons que, si $\text{FCar}(\mathbf{G}, (s))^F \neq \emptyset$, alors (s) est une classe de conjugaison F^* -stable. Par conséquent, on peut supposer que $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$, ce qui sera fait par la suite. D'autre part, si $\text{FCar}(\mathbf{G}, (s), a)^F \neq \emptyset$, alors on a, pour tout $A \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s), a)^F$, $\zeta_A = \omega_s(a) \in (\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge)^F$. Puisque ω_s est injectif, cela implique que $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$.

Par conséquent, nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse : Dans cette section, nous fixons un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ et un élément $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Nous reprenons les notations des chapitres précédents (\mathbf{T}_1^* , \mathbf{T}_1, \dots) et nous supposons que $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}_1^*$.

Nous aurons d'autre part besoin de la notation suivante. Si $\zeta \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$, nous posons

$$\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \eta_{\mathbf{G}} q^{-\frac{1}{2} \text{rg}_{\text{sem}}(\mathbf{G})} \sum_{z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))} \zeta(z)^{-1} \sum_{t \in \mathbf{T}_0^F / \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F} \psi_z(tut^{-1}).$$

Remarquons que $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$ est égal à $\eta_{\mathbf{G}} q^{-\frac{1}{2} \text{rg}_{\text{sem}}(\mathbf{G})}$ fois le scalaire noté $\sigma_{\zeta^{-1}}$ dans [DiLeMi2, §2]. En particulier [DiLeMi2, proposition 2.5] :

(22.1) Si $\zeta \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ est F -stable, alors $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$ est une racine quatrième de l'unité.

REMARQUE 22.2 - Le calcul de $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$ lorsque $\zeta \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ sera effectué dans l'appendice B. ■

22.A. Cas cuspidal. Nous allons rappeler dans cette sous-section comment les transformées de Fourier de caractères semi-simples sont reliées aux fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères cuspidaux dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\mathcal{U}_{\text{rég}}^\mathbf{G}$.

Supposons dans cette sous-section, et uniquement dans cette sous-section, que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$. Dans ce cas, on a

$$\text{FCar}(\mathbf{G}, (s), a)^F = \{A_{s,a,\tau} \mid \tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))^\wedge\}.$$

Posons $A_{s,a} = \bigoplus_{\tau \in (A_{\mathbf{G}^*}(s))^\wedge} A_{s,a,\tau}$. Alors $A_{s,a}$ est F -stable et il existe un unique isomorphisme $\varphi_{s,a} : F^*A_{s,a} \xrightarrow{\sim} A_{s,a}$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$, on ait

$$(\varphi_{s,a})_{zu} = \hat{s}(z) q^{\frac{1}{2} \text{rg}_{\text{sem}}(\mathbf{G})} \text{Id}_{(A_{s,a})_{zu}}.$$

Si $\tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))^\wedge$, notons $\varphi_{s,a,\tau}$ la restriction de $\varphi_{s,a}$ en un isomorphisme $F^*A_{s,a,\tau} \xrightarrow{\sim} A_{s,a,\tau}$. Il résulte de [Bon5, théorème 6.2.2] que

$$(22.3) \quad \mathcal{X}_{A_{s,a,\tau}, \varphi_{s,a,\tau}} = \mathcal{G}(\mathbf{G}, \omega_s(a)) \hat{\rho}_{s,a,\tau}.$$

22.B. Le résultat. Revenons au cas général, c'est-à-dire ne supposons plus que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$. On note alors $A_{s,a}$ le faisceau pervers $\bigoplus_{\tau \in (A_{\mathbf{G}^*}(s))^\wedge} A_{s,a,\tau}^{\mathbf{L}_{s,a}}$ sur $\mathbf{L}_{s,a}$ et on note $\varphi_{s,a} : F^*A_{s,a} \xrightarrow{\sim} A_{s,a}$ l'isomorphisme tel que, pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{s,a})^F$, on ait

$$(\varphi_{s,a})_{zu_{\mathbf{L}_{s,a}}} = \hat{s}(z) q^{\frac{1}{2} \text{rg}_{\text{sem}}(\mathbf{L}_{s,a})} \text{Id}_{(A_{s,a})_{zu_{\mathbf{L}_{s,a}}}}.$$

Si $\tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{L}_{s,a}}^*(s))^\wedge$, on note $\varphi_{s,a,\tau}$ la restriction de $\varphi_{s,a}$ en un isomorphisme $F^*A_{s,a,\tau}^{\mathbf{L}_{s,a}} \xrightarrow{\sim} A_{s,a,\tau}^{\mathbf{L}_{s,a}}$. D'après 22.3 appliquée à $\mathbf{L}_{s,a}$, on a

$$(22.4) \quad \mathcal{X}_{A_{s,a,\tau}, \varphi_{s,a,\tau}} = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a)) \hat{\rho}_{s,a,\tau}^{\mathbf{L}_{s,a}}.$$

Soit η un caractère irréductible F^* -stable de $W(s)^a$. Soit $\tilde{\eta}$ une extension de η à $W(s)^a \rtimes \langle \phi_1 \rangle$. Le choix de cette extension fixe un isomorphisme $\varphi_{s,a,\tilde{\eta}} : F^*K(s,a)_\eta \xrightarrow{\sim} K(s,a)_\eta$.

Théorème 22.5. *Supposons que p est bon pour \mathbf{G} et que q est assez grand. Soit η un caractère irréductible F^* -stable de $W(s)^a$. Soit $\tilde{\eta}$ une extension de η à $W(s)^a \rtimes \langle \phi_1 \rangle$. Alors*

$$\mathcal{X}_{K(s,a)\eta, \varphi_{s,a}, \tilde{\eta}} = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a}, s}(a)) \mathcal{R}(s, a)_{\tilde{\eta}}.$$

DÉMONSTRATION - Soit $w \in W(s)$. Notons \dot{w} un représentant de w dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_1)$. Fixons $g_w \in \mathbf{G}$ tel que $g_w^{-1}F(g_w) = \dot{w}$. On note \bar{w} la classe de w dans $W(s)/A_{\mathbf{L}_{s,a}}^*(s)$. On peut choisir la famille $(g_w)_{w \in W(s)}$ de sorte que, si $w \in W(s)$ et $b \in A_{\mathbf{L}_{s,a}}^*(s)$, on ait ${}^{g_w}\mathbf{L}_{s,a} = {}^{g_w b}\mathbf{L}_{s,a}$. Par suite, on peut poser

$$\mathbf{L}_{\bar{w}} = {}^{g_w}\mathbf{L}_{s,a} = \mathbf{L}_{s,a,w}.$$

Posons $\Sigma' = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{s,a}) \cdot \mathbf{C}$. Reprenons maintenant les hypothèses et notations du théorème 20.2 et supposons de plus que \mathbf{C} soit la classe unipotente régulière de $\mathbf{L}_{s,a}$, que \mathcal{L}' soit égal à la restriction de \mathcal{L}_s à $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_{s,a})$, que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\omega_{\mathbf{L}_{s,a}, s}(a)}$, que $\mathcal{F}' = \mathcal{L}' \boxtimes \mathcal{E}$ et que $\varphi' = \varphi_{s,a}$. Posons alors

$$\mathbf{C}_{\bar{w}} = {}^{g_w}\mathbf{C}, \quad \Sigma'_{\bar{w}} = {}^{g_w}\Sigma',$$

$$\mathcal{L}'_{\bar{w}} = (\text{ad } g_w^{-1})^* \mathcal{L}', \quad \mathcal{E}_{\bar{w}} = (\text{ad } g_w^{-1})^* \mathcal{E}, \quad \mathcal{F}'_{\bar{w}} = (\text{ad } g_w^{-1})^* \mathcal{F}' \quad \text{et} \quad A_{\bar{w}} = (\text{ad } g_w^{-1})^* A_{s,a}.$$

L'élément w définit quant à lui un isomorphisme $\varphi_w : F^* A_{\bar{w}} \xrightarrow{\sim} A_{\bar{w}}$ qui, lui, dépend de w et pas seulement de \bar{w} .

Compte tenu du théorème 20.2, il nous reste à montrer que

$$(*) \quad \mathcal{X}_{A_{\bar{w}}, \varphi_w} = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a}, s}(a)) \rho_{s_w, a}^{\mathbf{L}_{\bar{w}}}.$$

Rappelons que $s_w = g_w s g_w^{-1}$. On pose $\mathbf{T}_w = {}^{g_w}\mathbf{T}_1$ et $\mathcal{L}_{s,w} = (\text{ad } g_w^{-1})^* \mathcal{L}_s$. En fait, $\mathcal{L}'_{\bar{w}}$ est la restriction de $\mathcal{L}_{s,w}$ à $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_{\bar{w}})$. Par conséquent, on a, pour tous $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{\bar{w}})^F$ et $x \in \Sigma'_{\bar{w}}^F$,

$$\mathcal{X}_{A_{\bar{w}}, \varphi_w}(zx) = \hat{s}_w(z) \mathcal{X}_{A_{\bar{w}}, \varphi_w}(x).$$

D'autre part, l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{L}_{\bar{w}})$ par conjugaison sur $\mathcal{F}'_{\bar{w}}$ montre que, pour prouver (*), il suffit de montrer que

$$(**) \quad \mathcal{X}_{A_{\bar{w}}, \varphi_w}(u_{\mathbf{L}_{\bar{w}}}) = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a}, s}(a)) \rho_{s_w, a}^{\mathbf{L}_{\bar{w}}}(u_{\mathbf{L}_{\bar{w}}}).$$

Mais, d'après [DiLeMi2, proposition 2.5], on a $\mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a}, s}(a)) = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{\bar{w}}, \omega_{\mathbf{L}_{\bar{w}}, s}(a))$. Donc il suffit de montrer, d'après 22.4, que $\mathcal{X}_{A_{\bar{w}}, \varphi_w}(u_{\mathbf{L}_{\bar{w}}}) = q^{\frac{1}{2} \text{rg}_{\text{sem}} \mathbf{L}_{\bar{w}}}$, ce qui découle de [Bon7, théorème 15.10]. ■

Nous allons nous intéresser maintenant aux faisceaux-caractères dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Soit $K \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s))$ dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Notons a l'unique élément de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que $\zeta_K = \omega_s(a)$ (voir la proposition 18.4). Alors K est une composante irréductible de $\text{Ind}_{\mathbf{L}_{s,a}}^{\mathbf{G}} A_{s,a}$. Notons η_K le caractère irréductible de $W(s)^a$ correspondant.

Lemme 22.6. *Soit $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et supposons que le support de K contienne $z\mathcal{U}_{\text{rég}}$. Alors $\eta_K = \hat{\omega}_s(z)$.*

DÉMONSTRATION - Quitte à traduire K par un élément de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ (c'est-à-dire, d'après le théorème 19.4, à multiplier η_K par un caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$), on peut supposer que le support de K contient $\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. En utilisant les constructions de [Bon7, partie I], on s'aperçoit, en utilisant [Bon7, corollaire 6.7], que l'on peut supposer que $\mathcal{L}' = \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$. Dans ce cas, il découle de la définition de Θ et [Bon7, corollaire 6.2] que $\eta_K = 1$. ■

Corollaire 22.7. *Soit $K \in \text{FCar}(\mathbf{G}, (s))^F$ dont le support rencontre $z\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\wedge}$, pour un $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})^F$. Posons $\tau = \hat{\omega}_s^1(z)$ et notons $\tilde{\tau}$ l'extension de τ à $A_{\mathbf{G}^*}(s) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$ qui est triviale sur $\langle \phi_1 \rangle$. Alors*

$$\mathcal{X}_{K, \varphi_{s,a}, \tilde{\tau}} = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a}, s}(a)) \hat{\rho}_{s_{\alpha}, a, \tau}.$$

DÉMONSTRATION - Cela résulte immédiatement du théorème 22.5, du lemme 22.6 et de la proposition 17.15 (e). ■

Chapitre VII. Groupes de type A

Hypothèse : *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous supposons que toutes les composantes quasi-simples de \mathbf{G} sont de type A. Nous supposons aussi que $\delta = 1$, c'est-à-dire que $F : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ est un endomorphisme de Frobenius.*

Rappelons que l'hypothèse ci-dessus implique que la formule de Mackey a lieu dans \mathbf{G} (voir théorème 10.12). Le but de ce chapitre est d'obtenir un paramétrage des caractères irréductibles de \mathbf{G}^F et de montrer, lorsque q est assez grand, que la conjecture de Lusztig a lieu.

23. DESCRIPTION DE $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$

23.A. Structure de $W(s) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$. Notons ici $\Phi_{(1)}, \dots, \Phi_{(r)}$ les composantes irréductibles de Φ_s et posons $\Phi_{(i)}^+ = \Phi_s^+ \cap \Phi_{(i)}$ et $\Delta_{(i)} = \Delta \cap \Phi_{(i)}$. Notons $W_{(i)}$ le groupe de Weyl du système de racines $\Phi_{(i)}$. Alors $W^\circ(s) = W_{(1)} \times \dots \times W_{(r)}$.

Chaque $W_{(i)}$ est isomorphe à un groupe symétrique et $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ permute les $W_{(i)}$. Il est possible de choisir une famille d'isomorphismes $W_{(i)} \simeq \mathfrak{S}_{n_i}$ (où n_i est un entier naturel ≥ 2 et $\sum_{i=1}^r n_i = n$) telle que $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ agisse seulement par permutation des composantes. Une fois un tel choix d'isomorphismes effectué, il existe $w_s \in W^\circ(s)$ tel que $w_s F^*$ (ou $w_s \phi_1$) agisse sur $W^\circ(s)$ seulement par permutation des composantes. Il n'est pas défini de manière unique car le centre de $W^\circ(s)$ n'est pas forcément trivial. Cependant, cette non unicité ne peut se produire que lorsqu'il existe des i tels que $n_i = 2$. Si $n_i = 2$, nous supposons que la composante de w_s dans $W_{(i)}$ est égale à 1. Cela définit w_s de façon unique. S'il est nécessaire de préciser, nous le noterons $w_{\mathbf{G},s}$.

Lemme 23.1. *w_s commute avec les éléments de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$.*

DÉMONSTRATION - Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors $F^*(a) \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. D'autre part, $[w_s \phi_1, a]$ agit sur $W^\circ(s)$ seulement par permutation des composantes. Or, $[w_s \phi_1, a] = w_s F^*(a) w_s \in W^\circ(s)$. Par suite, $w_s F^*(a) w_s$ est central dans $W^\circ(s)$ et donc égal à 1 compte tenu du choix précis fait pour w_s . ■

23.B. Fonctions absolument cuspidales. Nous rappelons la description de l'espace des fonctions absolument cuspidales dans notre cas [Bon5, théorème 4.3.3] :

Théorème 23.2. *Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, alors*

$$\text{Cus}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}_\ell} \dot{\rho}_{s,a} & \text{si } \omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 23.3. *Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Alors l'application $\mathcal{R}[s, a] : \left(\text{Cent}(W^\circ(s)^a \phi_1) \right)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$ est une isométrie bijective (pour les produits scalaires $\langle, \rangle_{s,a}$ et $\langle, \rangle_{\mathbf{G}^F}$).*

DÉMONSTRATION - Le fait que $\mathcal{R}[s, a]$ est une isométrie a été montré dans la proposition 17.18. Il nous reste à montrer la surjectivité de $\mathcal{R}[s, a]$. Puisque la formule de Mackey a lieu dans \mathbf{G} (voir théorème 10.12), on a

$$\text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \bigoplus_{\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{s,a}} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\text{Cus}(\mathbf{L}^F, [s], a)),$$

où $\mathcal{L}_{s,a}$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi F -stables de \mathbf{G} dont un dual \mathbf{L}^* contient s et tels que $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}$. Mais, d'après le théorème 23.2, on a

$$\text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \bigoplus_{\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{s,a,\text{cus}}} \overline{\mathbb{Q}_\ell} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s,a}^{\mathbf{L}},$$

où $\mathcal{L}_{s,a,\text{cus}}$ est l'ensemble des $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{s,a}$ tels que $\omega_{\mathbf{L},s}(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{L})$. Il suffit alors de montrer que, si \mathbf{L}^* est un sous-groupe de Levi F^* -stable de \mathbf{G}^* contenant s et vérifiant que $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $\omega_{\mathbf{L},s}(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{L})$, alors \mathbf{L}^* est conjugué sous $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ à un $\mathbf{L}_{s,a,w}$ pour un $w \in W^\circ(s)^a$. Reprenons les notations du §17.D ($W_{\mathbf{L}}^\circ(s)$, $W_{\mathbf{L}}(s)$, $A_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $w_{\mathbf{L}}$). Alors $w_{\mathbf{L}}$ commute avec a et est le type du tore $C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)$ (voir corollaire 8.11 (a)).

Par suite, on peut supposer que $C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s) = \mathbf{T}_{w_{\mathbf{L}}}^*$. Puisque $\omega_{\mathbf{L},s}(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{L})$, on a $\mathbf{L}^* = C_{\mathbf{G}^*}^\circ(((\mathbf{T}_{w_{\mathbf{L}}}^*)^a)^\circ)$, ce qui montre que \mathbf{L}^* est conjugué sous $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ à $\mathbf{L}_{s,a,w_{\mathbf{L}}}$. ■

23.C. Une autre isométrie. Fixons encore $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. L'élément $w_s\phi_1$ agit sur $W^\circ(s)^a$ par permutation des composantes donc, d'après 27.6, on a une isométrie bijective naturelle entre $\text{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1) = \text{Cent}(W^\circ(s)^aw_s\phi_1)$ et $\text{Cent}(W^\circ(s)^{<a,w_s\phi_1>})$. Cette isométrie commute à l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. De même, a agissant par permutation des composantes de $W^\circ(s)^{w_sF^*}$, on a une isométrie bijective naturelle entre $\text{Cent}(W^\circ(s)^{<a,w_s\phi_1>})$ et $\text{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a)$ commutant à l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Nous noterons

$$\sigma_{s,a} : \text{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a) \longrightarrow \text{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)$$

la composition de ces isométries. Posons alors $R[s,a] = \mathcal{R}[s,a] \circ \sigma_{s,a}$. Notons que, si $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ et si $f \in \text{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a)$, alors, d'après 17.17, on a

$$(23.4) \quad R[s,a]_{bf} = R[s,a]_f.$$

L'application $\sigma_{s,a}$ se restreint en une isométrie bijective toujours notée

$$\sigma_{s,a} : \left(\text{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a) \right)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \longrightarrow \left(\text{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1) \right)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$$

à condition de munir $\left(\text{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a) \right)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle'_{s,a} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \langle \cdot, \cdot \rangle_{W^\circ(s)^{w_sF^*}a}$.

L'application $R[s,a] : \left(\text{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a) \right)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$ est alors une isométrie bijective (pour les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle'_{s,a}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{G}^F}$). Faisons l'identification isométrique canonique

$$\text{Cent}(W(s)^{w_sF^*}) = \bigoplus_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}^{\perp} \left(\text{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a) \right)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$$

et, à travers cette identification, posons

$$R[s] = \bigoplus_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} R[s,a].$$

On a alors :

Proposition 23.5. *L'application $R[s] : \text{Cent}(W(s)^{w_sF^*}) \longrightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$ est une isométrie bijective.*

Si cela s'avère nécessaire, nous noterons $\sigma_{s,a}^{\mathbf{G}}$, $R[s,a]^{\mathbf{G}}$ et $R[s]^{\mathbf{G}}$ les applications $\sigma_{s,a}$, $R[s,a]$ et $R[s]$.

23.D. Quelques propriétés de l'isométrie $R[s]$. Nous allons commencer par étudier l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ à travers cette isométrie. Si $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et si $f \in \text{Cent}(W(s)^{w_sF^*})$, alors

$$(23.6) \quad \tau_z^{\mathbf{G}} R[s]_f = R[s]_{f\hat{\omega}_s^0(z)},$$

où $\hat{\omega}_s^0(z)$ est vu comme un caractère linéaire de $W(s)^{w_sF^*} = W^\circ(s)^{w_sF^*} \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$.

Nous allons maintenant étudier un cas particulier d'induction de Lusztig. Un sous-groupe de Levi \mathbf{L}^* de \mathbf{G}^* est dit (s, \mathbf{G}^*) -déployé s'il est F^* -stable et s'il contient $\mathbf{T}_{w_s}^*$. Un sous-groupe de Levi \mathbf{L} de \mathbf{G} est dit (s, \mathbf{G}) -déployé s'il est F^* -stable et s'il contient \mathbf{T}_{w_s} . Nous allons ici calculer l'induction de Lusztig $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : \text{Cent}(\mathbf{L}^F, [s]) \rightarrow \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$ lorsque \mathbf{L} est (s, \mathbf{G}) -déployé en utilisant les isométries $R[s]^{\mathbf{L}}$ et $R[s]^{\mathbf{G}}$. Mais avant cela, nous allons étudier quelques-unes des propriétés de ces sous-groupes de Levi.

Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi (s, \mathbf{G}) -déployé. Notons \mathbf{L}^* un sous-groupe de Levi F^* -stable de \mathbf{G}^* contenant $\mathbf{T}_{w_s}^*$ tel que le triplet $(\mathbf{L}^*, \mathbf{T}_{w_s}^*, F^*)$ soit dual de $(\mathbf{L}, \mathbf{T}_{w_s}, F)$. Par définition, \mathbf{L}^* est (s, \mathbf{G}^*) -déployé. Comme dans §17.D, définissons un sous-groupe parabolique standard $W_{\mathbf{L}}^\circ(s)$ de $W^\circ(s)$ ainsi qu'un élément $w_{\mathbf{L}}$ de $W^\circ(s)$. Notons $w_{\mathbf{L},s}$ l'élément de $W_{\mathbf{L}}^\circ(s)$ défini comme w_s . Alors il est possible de choisir $w_{\mathbf{L}}$ et $w_{\mathbf{L},s}$ tels que $w_s = w_{\mathbf{L},s}w_{\mathbf{L}}$. Par suite $W_{\mathbf{L}}^\circ(s)w_{\mathbf{L}}\phi_1 = W_{\mathbf{L}}^\circ(s)w_s\phi_1$ et l'application $R[s]^{\mathbf{L}}$ est une isométrie $\text{Cent}(W_{\mathbf{L}}(s)^{w_sF^*}) \xrightarrow{\sim} \text{Cent}(\mathbf{L}^F, [s])$.

Proposition 23.7. *Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi (s, \mathbf{G}) -déployé de \mathbf{G} . Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \text{Cent}(W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}) & \xrightarrow{R[s]^{\mathbf{L}}} & \text{Cent}(\mathbf{L}^F, [s]) \\ \text{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}} \downarrow & & \downarrow R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \\ \text{Cent}(W(s)^{w_s F^*}) & \xrightarrow{R[s]^{\mathbf{G}}} & \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s]) \end{array}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION - Soit $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}$. Soit f une fonction centrale sur $W_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^{w_s F^*} a$ invariante par l'action de $A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}$. Notons $f^{\#}$ son extension par 0 en une fonction centrale sur $W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}$. Il nous suffit de montrer que

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} R[s]_f^{\mathbf{L}} = (R[s]^{\mathbf{G}} \circ \text{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}})(f^{\#}).$$

Posons $I = \text{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}} f^{\#}$, $g = \text{Ind}_{W_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^{w_s F^*} a}^{W^{\circ}(s)^{w_s F^*} a} f$ et notons $g^{\#}$ l'extension de g par 0 en une fonction (pas forcément centrale) sur $W(s)^{w_s F^*}$. Notons tout de même que $g^{\#}$ est invariante par $W^{\circ}(s)^{w_s F^*}$ -conjugaison. On a alors

$$f^{\#} = \frac{1}{|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}|} \text{Ind}_{W_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^{w_s F^*} a}^{W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}} f$$

et donc

$$I = \frac{1}{|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} {}^a g^{\#}.$$

Compte tenu de 23.4, on a donc

$$R[s]_I^{\mathbf{G}} = \frac{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}{|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}|} R[s, a]_g^{\mathbf{G}}.$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| R[s, a]_g^{\mathbf{G}} = |A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}| R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} R[s, a]_f^{\mathbf{L}}.$$

En d'autres termes, nous devons montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Cent}(W_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^{w_s F^*} a) & \xrightarrow{|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}| R[s, a]^{\mathbf{L}}} & \text{Cent}(\mathbf{L}^F, [s], a) \\ \text{Ind}_{W_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^{w_s F^*} a}^{W^{\circ}(s)^{w_s F^*} a} \downarrow & & \downarrow R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \\ \text{Cent}(W^{\circ}(s)^{w_s F^*} a) & \xrightarrow{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| R[s, a]^{\mathbf{G}}} & \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a), \end{array}$$

est commutatif. Cela découle de la commutativité du diagramme 27.8 et de la proposition 17.24. ■

Nous terminons par une formule exprimant $R[s]_f$ dans un cas particulier. Si ξ est un caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, nous verrons ξ comme une fonction centrale sur $W(s)^{w_s F^*}$ comme dans la formule 23.6.

Proposition 23.8. *Supposons que la conjecture (\mathfrak{G}) a lieu dans \mathbf{G} . Soit $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^{\wedge}$. Alors*

$$R[s]_{\xi} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^{\circ}(s)} \rho_{s, \xi}.$$

DÉMONSTRATION - Notons $1_{s, a}$ la fonction sur $W^{\circ}(s)^{w_s F^*} a$ constante et égale à 1. Alors $\sigma_{s, a}(1_{s, a})$ est constante et égale à 1. Puisque $\xi = \sum_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \xi(a) 1_{s, a}$, on a

$$R[s]_{\xi} = \sum_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \xi(a) \mathcal{R}[s, a]_{\sigma_{s, a}(1_{s, a})}.$$

Il suffit alors d'utiliser 17.1 et la proposition 17.22. ■

23.E. Caractères irréductibles de \mathbf{G}^F . Nous allons montrer ici que, si η est un caractère irréductible de $W(s)^{w_s F^*}$, alors $\pm R[s]_\eta$ est un caractère irréductible de \mathbf{G}^F . Nous aurons cependant besoin de la conjecture (G) ce qui, à l'heure actuelle, restreint le domaine de validité de ce résultat au cas où q est grand. Sachant que c'est une fonction centrale de norme 1, il suffit de montrer que c'est un caractère virtuel de \mathbf{G}^F . Pour cela, nous utiliserons le corollaire 28.3 ainsi que les propositions 23.7 et 23.8.

Théorème 23.9. *Supposons que la conjecture (G) a lieu dans \mathbf{G} . Soit $\eta \in \text{Cent}(W(s)^{w_s F^*})$. Alors $R[s]_\eta \in \pm \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$ si et seulement si $\eta \in \pm \text{Irr } W(s)^{w_s F^*}$.*

DÉMONSTRATION - Nous allons commencer par montrer le lemme suivant :

Lemme 23.10. *Soit W_1 un sous-groupe parabolique $w_s F^*$ -stable de $W^\circ(s)$ et soit A_1 son normalisateur dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Alors il existe un sous-groupe de Levi (s, \mathbf{G}) -déployé de \mathbf{G} tel que $W_{\mathbf{L}}(s) = W_1 \rtimes A_1$.*

DÉMONSTRATION - On peut identifier le groupe $W_1 \rtimes A_1$ à un sous-groupe F -stable de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_{w_s})/\mathbf{T}_{w_s}$. Posons alors

$$\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}_{w_s}^{W_1 \rtimes A_1})^\circ).$$

Alors \mathbf{L} est F -stable et (s, \mathbf{G}) -déployé. D'autre part, d'après le lemme 3.3, on a $W_{\mathbf{L}}^\circ(s) = W_1$. Il est de plus clair que $W_{\mathbf{L}}(s)$ contient $W_1 \rtimes A_1$. Comme A_1 est le normalisateur de $W_{\mathbf{L}}^\circ(s) = W_1$ dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$, on en déduit que $W_{\mathbf{L}}(s) = W_1 \rtimes A_1$. \square

Il résulte du corollaire 28.3, du lemme 23.10 et de la proposition 23.8 que, si $\eta \in \mathbb{Z} \text{Irr } W(s)^{w_s F^*}$, alors $R[s]_\eta$ est une combinaison linéaire, à coefficients dans \mathbb{Z} , de caractères virtuels de la forme $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \rho$, où \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi (s, \mathbf{G}) -déployé de \mathbf{G} et $\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s])$ est un caractère semi-simple. En particulier, $R[s]_\eta$ est un caractère virtuel. Par suite, si η est de plus irréductible, $R[s]_\eta$ est un caractère virtuel de norme 1, donc c'est, au signe près, un caractère irréductible. \blacksquare

Comme conséquence directe de la preuve du théorème précédent, on obtient :

Corollaire 23.11. *Supposons que la conjecture (G) a lieu dans \mathbf{G} . Notons \mathcal{S} l'ensemble des couples (\mathbf{L}, ρ) où \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi (s, \mathbf{G}) -déployé de \mathbf{G} et $\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s])$ est un caractère semi-simple. Soit $\gamma \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\gamma \in \mathbb{Z} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.
- (2) $\gamma \in \bigoplus_{(\mathbf{L}, \rho) \in \mathcal{S}} \mathbb{Z} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \rho$.
- (3) Pour tout $(\mathbf{L}, \rho) \in \mathcal{S}$, $\langle {}^* R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \gamma, \rho \rangle_{\mathbf{L}^F} \in \mathbb{Z}$.

Corollaire 23.12. *Supposons que la conjecture (G) a lieu dans \mathbf{G} . Notons \mathcal{R} l'ensemble des couples (\mathbf{L}, χ) où \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi (s, \mathbf{G}) -déployé de \mathbf{G} et $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s])$ est un caractère régulier. Soit $\gamma \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\gamma \in \mathbb{Z} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.
- (2) $\gamma \in \bigoplus_{(\mathbf{L}, \chi) \in \mathcal{R}} \mathbb{Z} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \chi$.
- (3) Pour tout $(\mathbf{L}, \chi) \in \mathcal{R}$, $\langle {}^* R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \gamma, \chi \rangle_{\mathbf{L}^F} \in \mathbb{Z}$.

23.F. Signes. Nous allons terminer cette section en expliquant comment déterminer le signe intervenant dans le théorème 23.9. Plus précisément, soit $\eta \in \text{Irr } W(s)^{w_s F^*}$. D'après le théorème 23.9, il existe un unique $\varepsilon_\eta \in \{1, -1\}$ tel que $\varepsilon_\eta R[s]_\eta$ soit un caractère irréductible de \mathbf{G}^F . Pour calculer ε_η , nous rappelons la construction des caractères irréductibles de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ par Lusztig et Srinivasan [LuSr] dans le cadre de la théorie de Deligne-Lusztig. Si χ est un caractère irréductible F^* -stable de $W(\tilde{s}) = W^\circ(\tilde{s}) = W^\circ(s)$, nous noterons $\hat{\chi}$ son *extension préférée* (au sens de [Lu6, chapitre IV, §17]) au groupe $W(\tilde{s}) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$. Rappelons aussi que l'isométrie $\mathcal{R}(\tilde{s}) : \text{Cent}(W(\tilde{s})\phi_1) \rightarrow \text{Cent}(\tilde{\mathbf{G}}^F, (\tilde{s}))$ a été définie dans l'exemple 17.16.

Théorème 23.13 (Lusztig-Srinivasan). *Si χ est un caractère irréductible F^* -stable de $W(\tilde{s})$, alors la fonction centrale $\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})}\mathcal{R}(\tilde{s})_{\tilde{\chi}}$ est un caractère irréductible de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ appartenant à $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, (\tilde{s}))$. De plus, l'application*

$$\begin{aligned} (\text{Irr } W(\tilde{s}))^{F^*} &\longrightarrow \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]) \\ \chi &\longmapsto \varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})}\mathcal{R}(\tilde{s})_{\tilde{\chi}} \end{aligned}$$

est bijective.

Notons $\mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$ l'ensemble des couples (χ, ξ) où $\chi \in (\text{Irr } W^\circ(s))^{F^*}$ et $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi))^{F^*}$. Si $(\chi, \xi) \in \mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$, on note χ_ϕ le caractère irréductible de $W^\circ(s)^{w_s F^*}$ correspondant à χ par la bijection 27.4. Si $A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)$ désigne le stabilisateur de χ dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$, alors $A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)^{F^*}$ est le stabilisateur de χ_ϕ dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Notons $\tilde{\chi}_\phi$ l'extension canonique de χ_ϕ à $W^\circ(s)^{w_s F^*} \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)^{F^*}$ (voir proposition 27.1). Posons alors

$$\eta_{\chi, \xi} = \text{Ind}_{W^\circ(s)^{w_s F^*} \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)^{F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}} (\tilde{\chi}_\phi \otimes \xi).$$

Le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ agit sur $\mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$ par conjugaison sur la première composante. D'après 27.2, l'application

$$(23.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*) &\longrightarrow \text{Irr } W(s)^{w_s F^*} \\ (\chi, \xi) &\longmapsto \eta_{\chi, \xi} \end{aligned}$$

est surjective et ses fibres sont les orbites sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Notons maintenant $\tilde{\chi}$ l'extension canonique de χ à $W^\circ(s) \rtimes \langle w_s \phi_1 \rangle = W^\circ(s) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$.

Proposition 23.15. *Soit χ un caractère irréductible F^* -stable de $W^\circ(s)$. Alors*

$$\text{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \mathcal{R}(\tilde{s})_{\tilde{\chi}} = \sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi))^{F^*}{}^\wedge} R[s]_{\eta_{\chi, \xi}}.$$

DÉMONSTRATION - On a

$$\sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi))^{F^*}{}^\wedge} \eta_{\chi, \xi} = \text{Ind}_{W^\circ(s)^{w_s F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}} \chi_\phi.$$

Cette fonction centrale est nulle en dehors de $W^\circ(s)^{w_s F^*}$ et coïncide avec $\sum_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} {}^a \chi_\phi$ sur $W^\circ(s)^{w_s F^*}$. Compte tenu de 23.4, on a

$$\sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi))^{F^*}{}^\wedge} R[s]_{\eta_{\chi, \xi}} = |A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| \times R[s, 1]_{\chi_\phi}.$$

Mais, par construction, $R[s, 1]_{\chi_\phi} = \mathcal{R}(s, 1)_{\tilde{\chi}}$. Le résultat découle alors de la proposition 11.5 (a). ■

D'après [Lu6, chapitre IV, §17], il existe un unique $\varepsilon_\chi \in \{1, -1\}$ tel que $\hat{\chi} = \varepsilon_\chi \tilde{\chi}$ sur $W^\circ(s)\phi_1$. Ce signe est déterminé à partir des deux exemples extrêmes suivants :

EXEMPLE 23.16 - Si $w_s = 1$, alors $\varepsilon_\chi = 1$ (voir corollaire 29.3). □

EXEMPLE 23.17 - Si $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ est quasi-simple et si $w_s \neq 1$, alors, d'après [Lu6, chapitre IV, §17.2 (a)], on a $\varepsilon_\chi = (-1)^{\mathbf{a}_\chi}$, où \mathbf{a}_χ est le \mathbf{a} -invariant attaché à χ (voir [Lu6, §16.2]). □

Il résulte alors de la proposition 23.15 et du théorème de Lusztig-Srinivasan que :

Corollaire 23.18. *Si $(\chi, \xi) \in \mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$, alors $\varepsilon_{\eta_{\chi, \xi}} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)}\varepsilon_\chi$.*

24. CONJECTURE DE LUSZTIG

Dorénavant, nous noterons $\mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, [s])$ l'ensemble $\{\varepsilon_\eta R[s]_\eta \mid \eta \in \text{Irr } W(s)^{w_s F^*}\}$. Il est vraisemblable qu'en général $\mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, [s]) = \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Cependant, nous ne sommes pour l'instant capable de le prouver que lorsque q est assez grand (voir le théorème 23.9). Nous travaillerons néanmoins avec cet ensemble. Nous posons $\mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, (s)) = \coprod_{\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))} \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, [s_\alpha])$.

24.A. Familles. Reprenons les notations précédant le lemme 9.14. Si $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, soit $\delta(\alpha)$ l'élément de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ représenté par $g_\alpha^{-1} F(g_\alpha)$. En fait, l'application $\delta : H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s)) \rightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est une section du morphisme canonique $A_{\mathbf{G}^*}(s) \rightarrow H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Ce n'est en général pas un morphisme de groupes.

Le groupe $W(s_\alpha)$ est naturellement isomorphe à $W(s)$ (grâce à la conjugaison par g_α), mais nous devons le munir d'un automorphisme de Frobenius différent $\delta(\alpha)F^*$. Par exemple, on a une application surjective (voir 23.14)

$$\mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), \delta(\alpha)F^*) \longrightarrow \text{Irr } W(s)^{w_s \alpha F^*}$$

qui induit une application surjective

$$\mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), \delta(\alpha)F^*) \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, [s_\alpha]).$$

On en déduit une troisième application surjective

$$(24.1) \quad \coprod_{\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))} \mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), \delta(\alpha)F^*) \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, (s)).$$

Les fibres de cette application sont des $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ -orbites (en effet, puisque $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est abélien, on a $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{a F^*} = A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ pour tout $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$). Nous allons ici donner une autre description de cette surjection en termes de familles.

Soit χ un caractère irréductible de $W^\circ(s)$. S'il existe $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ tel que χ est $\delta(\alpha)F^*$ -stable, alors l'orbite de χ sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est F^* -stable. Réciproquement, si l'orbite de χ sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est F^* -stable, alors il existe $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ et $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tels que $\chi = {}^{a^{-1}\delta(\alpha)F^*(a)}(F^*\chi)$. En particulier, ${}^a\chi$ est $\delta(\alpha)F^*$ -stable. Nous allons donc utiliser les $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ -orbites F^* -stables de caractères irréductibles pour regrouper les éléments de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ en familles. On note

$$\mu_\chi : H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)) \longrightarrow H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$$

le morphisme naturel de groupes.

Si χ est un caractère irréductible de $W^\circ(s)$, nous noterons $[\chi]$ son orbite sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. On note $A_{\mathbf{G}^*}(s) \setminus \text{Irr } W^\circ(s)$ l'ensemble de ces orbites. Fixons un élément F^* -stable $[\chi] \in A_{\mathbf{G}^*}(s) \setminus \text{Irr } W^\circ(s)$. Alors, d'après le calcul précédent, on peut choisir χ de sorte que χ soit $\delta(\alpha_\chi)F^*$ -stable pour un $\alpha_\chi \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Bien sûr, le couple (χ, α_χ) n'est pas uniquement déterminé par $[\chi]$. De plus, l'élément α_χ n'est pas forcément déterminé par le choix de χ .

Soit maintenant $(\xi, \alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)$. Alors il existe $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que

$$a^{-1} \delta(\mu_\chi(\alpha) \alpha_\chi) \delta(\alpha_\chi)^{-1} F^*(a) \in A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)$$

et représente α . On pose alors

$$\chi_\alpha = {}^a\chi.$$

Le caractère χ_α est déterminé à $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ -conjugaison près et il est facile de vérifier que χ_α est stable sous l'action de $\delta(\mu_\chi(\alpha) \alpha_\chi)F^*$. On pose alors

$$(24.2) \quad R(s, \chi, \alpha_\chi)_{\alpha, \xi} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} \varepsilon_\chi R[s_{\mu_\chi(\alpha) \alpha_\chi}]_{\eta_{\chi_\alpha, \xi}} \in \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, (s)).$$

Alors la fonction centrale $R(s, \chi, \alpha_\chi)_{\alpha, \xi}$ dépend uniquement du choix de χ , α_χ et δ : rappelons que c'est un caractère irréductible, du moins lorsque q est assez grand (voir le théorème 23.9 et le corollaire 23.18).

Proposition 24.3. *Soient (ξ, α) et (ξ', α') deux éléments de $\mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)$. Alors $R(s, \chi, \alpha_\chi)_{\alpha, \xi} = R(s, \chi, \alpha_\chi)_{\alpha', \xi'}$ si et seulement si $(\xi, \alpha) = (\xi', \alpha')$.*

DÉMONSTRATION - Soient (ξ, α) et (ξ', α') deux éléments de $\mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)$ tels que $R(s, \chi, \alpha_\chi)_{\alpha, \xi} = R(s, \chi, \alpha_\chi)_{\alpha', \xi'}$. Alors, par construction, on sait que $\mu_\chi(\alpha) = \mu_\chi(\alpha')$, les caractères χ_α et $\chi_{\alpha'}$ sont conjugués sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ et $\xi = \xi'$ (d'après la proposition 23.14). Soient a et a' deux éléments de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$

tels que $a^{-1}\delta(\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi)\delta(\alpha_\chi)^{-1}F^*(a)$ et $a'^{-1}\delta(\mu_\chi(\alpha')\alpha_\chi)\delta(\alpha_\chi)^{-1}F^*(a')$ appartiennent à $A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)$ et représentent α et α' respectivement. Alors, puisque $\chi_\alpha = {}^a\chi$ et $\chi_{\alpha'} = {}^{a'}\chi$ sont conjugués sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, il existe $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)$ et $c \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ tels que $a' = abc$. Cela montre que $\alpha = \alpha'$. ■

Si on note $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$ l'ensemble $\{R(s, \chi, \alpha_\chi)_{\alpha, \xi} \mid (\xi, \alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)\}$, alors $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$ ne dépend que de $[\chi]$ et non du choix de χ et α_χ . On a alors

$$(24.4) \quad \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, (s)) = \coprod_{[\chi] \in (A_{\mathbf{G}^*}(s) \setminus \text{Irr } W^\circ(s))^{F^*}} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$$

et la proposition 24.3 montre qu'il y a une bijection

$$(24.5) \quad \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$$

pour tout $[\chi] \in (A_{\mathbf{G}^*}(s) \setminus \text{Irr } W^\circ(s))^{F^*}$. Cette bijection dépend du choix de χ , α_χ , δ . Nous noterons $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$ le sous- $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s))$ engendré par $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$. On a, d'après 24.4,

$$(24.6) \quad \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s)) = \bigoplus_{[\chi] \in (A_{\mathbf{G}^*}(s) \setminus \text{Irr } W^\circ(s))^{F^*}} \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$$

24.B. Transformation de Fourier. Fixons $\chi \in \text{Irr } W^\circ(s)^{F^*}$ dont la $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ -orbite est F^* -stable et soit α_χ un élément de $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ tel que χ soit $\delta(\alpha_\chi)F^*$ -stable. Si $(\xi, \alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)$, notons $R(s, \chi, \alpha_\chi)_{\alpha, \xi}$ la fonction centrale définie précédemment grâce à ce choix-ci via 24.2.

Si $(a, \tau) \in \mathcal{M}^\vee(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)$, posons

$$\hat{R}(s, \chi, \alpha_\chi)_{a, \tau} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)^{F^*}|} \sum_{(\xi, \alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)} \xi(a)^{-1} \tau(\alpha) R(s, \chi, \alpha_\chi)_{\alpha, \xi}.$$

Alors $(\hat{R}(s, \chi, \alpha_\chi)_{a, \tau})_{(a, \tau) \in \mathcal{M}^\vee(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)}$ est une base orthonormale de $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$. La proposition suivante décrit l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ sur $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$ dans cette base.

Proposition 24.7. *Soit $(a, \tau) \in \mathcal{M}^\vee(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)$. Alors :*

- (a) $\hat{R}(s, \chi, \alpha_\chi)_{a, \tau} \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$.
- (b) *Soit $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$. Notons τ_z la restriction à $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi))$ du caractère linéaire $\hat{\omega}_s^1(\bar{z})$ de $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, où \bar{z} désigne la classe de z dans $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F$. Alors*

$$t_z^{\mathbf{G}} \hat{R}(s, \chi, \alpha_\chi)_{a, \tau} = \hat{s}_{\alpha_\chi}(z) \hat{R}(s, \chi, \alpha_\chi)_{a, \tau \tau_z}.$$

DÉMONSTRATION - La première assertion découle immédiatement de la définition. La deuxième découle du lemme 9.14 et de la remarque 11.1 (d). ■

24.C. Conjecture de Lusztig. Fixons un caractère χ de $W^\circ(s)$ et un élément α_χ de $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ tels que $\delta(\alpha_\chi)^{F^*} \chi = \chi$. Soit $(a, \tau) \in \mathcal{M}^\vee(A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi), F^*)$. Notons χ_a le caractère irréductible de $W^\circ(s)^a$ associé à χ par la bijection 27.4. Son stabilisateur dans $A_{\mathbf{G}^*}(s) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$ est $A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi) \rtimes \langle \delta(\alpha_\chi) \phi_1 \rangle$. On note $\tilde{\chi}_a$ l'extension canonique de χ_a à $W^\circ(s)^a \rtimes (A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi) \rtimes \langle \delta(\alpha_\chi) \phi_1 \rangle)$. On note $\tilde{\tau}_{\alpha_\chi}$ l'extension de τ à $A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi) \rtimes \langle \delta(\alpha_\chi) \phi_1 \rangle$ telle que $\tilde{\tau}_{\alpha_\chi}(\delta(\alpha_\chi) \phi_1) = 1$. Pour finir, on pose

$$\eta_{\chi, a, \tau} = \text{Ind}_{W^\circ(s)^a \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)}^{W(s)^a} (\tilde{\chi}_a \otimes \tau)$$

$$\text{et} \quad \tilde{\eta}_{\chi, \alpha_\chi, a, \tau} = \text{Ind}_{W^\circ(s)^a \rtimes (A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi) \rtimes \langle \delta(\alpha_\chi) \phi_1 \rangle)}^{W(s)^a \rtimes \langle \phi_1 \rangle} (\tilde{\chi}_a \otimes \tilde{\tau}_{\alpha_\chi}).$$

Alors $\eta_{\chi, a, \tau}$ est un caractère F^* -stable de $W(s)^a$ et $\tilde{\eta}_{\chi, \alpha_\chi, a, \tau}$ est une extension de $\eta_{\chi, a, \tau}$ à $W(s)^a \rtimes \langle \phi_1 \rangle$.

Théorème 24.8. *Avec les notation précédentes, on a*

$$\hat{R}(s, \chi, \alpha_\chi)_{a, \tau} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} \varepsilon_\chi \mathcal{R}(s, a) \tilde{\eta}_{\chi, \alpha_\chi, a, \tau}.$$

DÉMONSTRATION - Quitte à changer d'élément semi-simple F^* -stable dans (s) , on peut supposer que $\alpha_\chi = 1$ (rappelons qu'alors $\delta(\alpha_\chi) = 1$). D'autre part, le résultat ne dépend pas du choix de la section δ , donc nous pourrions supposer que $\delta(\mu_1(\alpha)) \in A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)$ pour tout $\alpha \in A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)$. Ici, $\mu_1 : A_{\mathbf{G}^*}(s) \rightarrow H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ est l'application canonique.

Soit $\alpha \in A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)$. Notons $\bar{\alpha}$ la classe de α dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi))$. Alors il existe $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que $b^{-1}\delta(\mu_1(\alpha))F^*(b) = \alpha$ et on pose $\chi_\alpha = {}^b\chi$. Alors $R[s_{\mu_1(\alpha)}]_{\eta_{\chi_\alpha, \xi}}$ ne dépend que de $\bar{\alpha}$ et est égal à $R[s_{\mu_\chi(\bar{\alpha})}]_{\eta_{\chi_\alpha, \xi}}$. Par suite, si on note $\chi_{\alpha, a}$ le caractère irréductible de $W^\circ(s)^a$ associé à χ_α par la bijection 27.4, on a

$$\hat{R}(s, \chi, \alpha_\chi)_{a, \tau} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)|} \sum_{\alpha \in A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)} \tau(\alpha)^{-1} \mathcal{R}[s_{\mu_1(\alpha)}, a]_{\tilde{\chi}_{\alpha, a}}.$$

D'autre part, si $w \in W^\circ(s)^a$, on a $\tilde{\chi}_{\alpha, a}(w\delta(\mu_1(\alpha))\phi_1) = \tilde{\chi}_a(b^{-1}wb\alpha)$ et $R_{\mathbf{L}_{s, \mu_1(\alpha)}, w, a}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s, w\delta(\mu_1(\alpha)), a}^{\mathbf{L}_{s, \mu_1(\alpha)}, w, a} = R_{\mathbf{L}_{s, w\alpha, a}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s, w\alpha, a}^{\mathbf{L}_{s, w\alpha, a}}$. Par suite,

$$\hat{R}(s, \chi, \alpha_\chi)_{a, \tau} = \frac{1}{|W^\circ(s)^a \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)|} \sum_{w \in W^\circ(s)^a \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s, \chi)} (\tilde{\chi}_a \otimes \tilde{\tau}_1)(w\phi_1) R_{\mathbf{L}_{s, w, a}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s, w, a}^{\mathbf{L}_{s, w, a}},$$

ce qui montre le résultat (voir aussi [Bon2, lemme 3.1.1]). ■

Le théorème 24.8 et le théorème 22.5 montre la conjecture de Lusztig pour tous les groupes de type A lorsque q est assez grand :

Corollaire 24.9 (Conjecture de Lusztig en type A). *Avec les notation précédentes, on a*

$$\hat{R}(s, \chi, \alpha_\chi)_{a, \tau} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)} \varepsilon_\chi \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s, a}, \omega_{\mathbf{L}_{s, a}, s}(a))^{-1} \mathcal{X}_{K(s, a)_{\eta_{\chi, a, \tau}, \tilde{\eta}_{\chi, \alpha_\chi, a, \tau}}}.$$

25. LE GROUPE SPÉCIAL LINÉAIRE

Nous précisons ici, dans le cas du groupe spécial linéaire, quelques-uns des résultats obtenus dans le chapitre précédent. Nous établissons aussi une *décomposition de Jordan* des caractères et sa compatibilité avec l'induction de Lusztig (voir le diagramme 25.5).

Hypothèse : *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cette section, nous fixons un groupe à centre connexe $\tilde{\mathbf{G}}_\bullet$ de type A_{n-1} muni d'un endomorphisme de Frobenius déployé F sur \mathbb{F}_q et nous supposons que \mathbf{G} est un sous-groupe de Levi F -stable de $\tilde{\mathbf{G}}_\bullet$.*

Notons avant de commencer que l'hypothèse entraîne que $w_s = 1$ et donc que $\varepsilon_\chi = 1$ pour tout caractère irréductible F^* -stable χ de $W^\circ(s)$ (voir exemple 23.16). En d'autres termes, F^* agit sur $W^\circ(s)$ (qui est un produit direct de groupes symétriques) seulement par permutation des composantes.

25.A. Théorie de Harish-Chandra. Commençons par décrire les séries de Harish-Chandra contenues dans $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.

Proposition 25.1. *On a $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) = \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s})$.*

DÉMONSTRATION - D'après la proposition 23.5, on a $|\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])| = |\text{Irr } W(s)^{F^*}|$. D'après 16.6, on a $|\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s})| = |\text{Irr } W(s)^{F^*}|$. Puisque $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s})$ est contenu dans $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$, on a en fait l'égalité de ces deux ensembles. ■

D'après la proposition 25.1 et d'après 16.6, on obtient une bijection

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr } W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta[s]. \end{array}$$

En fait, cette bijection coïncide avec celle obtenue via l'isométrie $R[s]$, du moins lorsque q est assez grand :

Théorème 25.2. *Si la conjecture (\mathfrak{G}) a lieu dans \mathbf{G} , alors $R_\eta[s] = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)} R[s]_\eta$ pour tout $\eta \in \text{Irr } W(s)^{F^*}$.*

DÉMONSTRATION - Soit W_1 un sous-groupe parabolique standard F^* -stable de $W^\circ(s)$ et soit A_1 son normalisateur dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Alors, par le même raisonnement que dans la preuve du lemme 23.10, on a $W_1 \rtimes A_1 = W_{\mathbf{L}}(s)$ pour

$$\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}_1^{W_1 \rtimes (A_1 \rtimes \langle \phi_1 \rangle)})^\circ).$$

Le groupe \mathbf{L} est en fait \mathbf{G} -déployé. Donc, compte tenu du corollaire 28.3, de la proposition 23.7 et du théorème 16.10 (c), il suffit de montrer le résultat lorsque η se factorise en un caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Cela découle alors de 16.7, du théorème 16.10 (b) et de la proposition 23.8. ■

La preuve du théorème 25.2 montre également la version suivante plus précise du corollaire 23.11. Il n'y a pas besoin d'hypothèse sur q car on peut passer par la théorie de Harish-Chandra et le théorème 16.10 (c).

Corollaire 25.3. *Notons \mathcal{S}_d l'ensemble des couples (\mathbf{L}, ρ) ou \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi \mathbf{G} -déployé de \mathbf{G} dont un dual \mathbf{L}^* dans \mathbf{G}^* contient s et $\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s])$ est un caractère semi-simple. Soit $\gamma \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\gamma \in \mathbb{Z}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.
- (2) $\gamma \in \bigoplus_{(\mathbf{L}, \rho) \in \mathcal{S}_d} \mathbb{Z}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\rho$.
- (3) Pour tout $(\mathbf{L}, \rho) \in \mathcal{S}_d$, $\langle {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\gamma, \rho \rangle_{\mathbf{L}^F} \in \mathbb{Z}$.

Corollaire 25.4. *Notons \mathcal{R}_d l'ensemble des couples (\mathbf{L}, χ) ou \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi \mathbf{G} -déployé de \mathbf{G} dont un dual \mathbf{L}^* dans \mathbf{G}^* contient s et $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s])$ est un caractère régulier. Soit $\gamma \in \text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\gamma \in \mathbb{Z}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.
- (2) $\gamma \in \bigoplus_{(\mathbf{L}, \chi) \in \mathcal{R}_d} \mathbb{Z}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\chi$.
- (3) Pour tout $(\mathbf{L}, \chi) \in \mathcal{R}_d$, $\langle {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\gamma, \chi \rangle_{\mathbf{L}^F} \in \mathbb{Z}$.

25.B. Décomposition de Jordan. D'après [Bon2, proposition 6.4.3], l'application i^* induit une bijection entre $\mathcal{E}(i^{*-1}(C_{\mathbf{G}^*}(s))^{F^*}, 1)$ et $\mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1)$. Par suite, d'après [Bon2, 7.4.3], on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr } W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1) \\ \eta & \longmapsto & R_{s, \eta}. \end{array}$$

On obtient donc une bijection

$$\begin{array}{ccc} \aleph_{\mathbf{G}, s} : \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) & \longrightarrow & \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1) \\ R_{\eta}[s] & \longmapsto & R_{s, \eta} \end{array}$$

appelée *décomposition de Jordan* des caractères de \mathbf{G}^F .

Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} et soit \mathbf{L}^* un sous-groupe de Levi F^* -stable de \mathbf{G}^* dual de \mathbf{L} et contenant s . D'après le théorème 25.2, d'après la proposition 17.24 et d'après [Bon2, théorème 7.6.1], le diagramme

$$(25.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s]) & \xrightarrow{\aleph_{\mathbf{L}, s}} & \mathbb{Z}\mathcal{E}(C_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}, 1) \\ \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{L}} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} \varepsilon_{C_{\mathbf{L}^*}(s)} R_{C_{\mathbf{L}^*}(s)}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)} \\ \mathbb{Z}(\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])) & \xrightarrow{\aleph_{\mathbf{G}, s}} & \mathbb{Z}\mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1) \end{array}$$

est commutatif lorsque la conjecture (\mathfrak{G}) a lieu dans \mathbf{G} .

26. QUESTIONS EN SUSPENS

1. Il serait intéressant d'étudier les questions abordées dans ce chapitre (séries de Harish-Chandra, décomposition de Jordan) dans le cas des groupes de type A non nécessairement déployés. Concernant la question de la décomposition de Jordan, il faudrait établir l'analogie de la bijection [Bon2, 7.4.3]. La commutativité de l'analogie du diagramme 25.5 est alors purement formelle.
2. À travers le théorème 23.9, on obtient un paramétrage des caractères irréductibles de \mathbf{G}^F par les paires (χ, ξ) en utilisant seulement un caractère de Gelfand-Graev de \mathbf{G}^F . Un autre paramétrage par les paires (χ, ξ) a été obtenu par Shoji [Sh2] (ou encore [Bon5]) en utilisant les caractères de Gelfand-Graev généralisés. Il serait intéressant de relier ces deux paramétrages. Cela permettrait de relier les transformées de Fourier introduites ici et les *caractères fantômes* définis par Shoji dans [Sh3].
3. L'écriture d'un algorithme effectif, à partir des résultats de cet article, pour calculer la table de caractères des groupes réductifs connexes de type A est maintenant théoriquement possible. Cela reste tout de même un travail considérable.

Appendice A. Produits en couronne

Nous allons rappeler dans cet appendice quelques faits sur les caractères de produits en couronne de groupe finis. Nous reprendrons essentiellement ce qui est fait dans [Bon2, §2].

Dans cet appendice, r, d_1, \dots, d_r désigneront des entiers naturels non nuls. On se fixe des groupes finis G_1, \dots, G_r et on pose

$$G^\circ = \prod_{i=1}^r \underbrace{(G_1 \times \dots \times G_r)}_{d_i \text{ fois}}.$$

On fixe aussi un morphisme de groupes $A \rightarrow \mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_r}$. Alors A agit sur G° via ce morphisme par permutations des composantes et on pose

$$G = G^\circ \rtimes A.$$

27. EXTENSION CANONIQUE

27.A. Définition. Si χ est un caractère irréductible de G° , on note $A(\chi)$ son stabilisateur dans A et $G(\chi)$ son stabilisateur dans G . On a $G(\chi) = G^\circ \rtimes A(\chi)$. La proposition suivante est classique et sa preuve peut par exemple être trouvée dans [Bon2, Proposition 2.3.1] :

Proposition 27.1. *Soit χ un caractère irréductible de G° . Alors il existe une unique extension $\tilde{\chi}$ de χ à G telle que $\tilde{\chi}(\alpha)$ soit un entier naturel non nul pour tout $\alpha \in A(\chi)$.*

Soit $\mathcal{I}(G^\circ, A)$ l'ensemble des couples (χ, ξ) où $\chi \in \text{Irr } G^\circ$ et $\xi \in \text{Irr } A(\chi)$. Le groupe A agit par conjugaison sur $\mathcal{I}(G^\circ, A)$ et, par la théorie de Clifford, l'application

$$(27.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}(G^\circ, A) &\longrightarrow \text{Irr } G \\ (\chi, \xi) &\longmapsto \text{Ind}_{G(\chi)}^G(\tilde{\chi} \otimes \xi) \end{aligned}$$

induit une bijection entre $\mathcal{I}(G^\circ, A)/A$ et $\text{Irr } G$.

Le caractère irréductible $\tilde{\chi}$ de la proposition 27.1 sera appelé l'*extension canonique* de χ à $G(\chi)$. Soit $a \in A$. Dans [Bon2, 2.2], l'auteur a construit une application

$$(27.3) \quad \pi_a : G^\circ a \longrightarrow G^{\circ a}$$

induisant une bijection bien définie entre l'ensemble des classes de conjugaison de $G^\circ \rtimes \langle a \rangle$ contenues dans $G^\circ a$ et l'ensemble des classes de conjugaison de $(G^\circ)^a$ ainsi qu'une bijection

$$(27.4) \quad \begin{aligned} (\text{Irr } G^\circ)^a &\longrightarrow \text{Irr}((G^\circ)^a) \\ \chi &\longmapsto \chi_a. \end{aligned}$$

Si $\chi \in (\text{Irr } G^\circ)^a$, nous noterons $\tilde{\chi}_a$ la restriction de $\tilde{\chi}$ à $G^\circ a$. Alors $(\tilde{\chi}_a)_{\chi \in (\text{Irr } G^\circ)^a}$ est une base orthonormale de $\text{Cent}(G^\circ a)$. Ces deux applications satisfont la propriété suivante : si χ est un caractère irréductible de G° et si $a \in A(\chi)$, alors

$$(27.5) \quad \tilde{\chi}(w) = \chi_a(\pi_a(w))$$

pour tout $w \in G^\circ a$. Rappelons aussi que $\pi_a(a) = 1$ donc $\tilde{\chi}(a) = \chi_a(1)$. D'autre part, l'application π_a induit une application linéaire

$$(27.6) \quad \begin{aligned} \pi_a^* : \text{Cent}((G^\circ)^a) &\longrightarrow \text{Cent}(G^\circ a) \\ f &\longmapsto f \circ \pi_a \end{aligned}$$

et l'égalité 27.5 montre que c'est une isométrie.

EXEMPLE 27.7 - Nous rappelons ici la définition de ces deux applications dans un cas particulier dont le cas général peut aisément se déduire par produit direct. Supposons que $r = 1$ et posons $d = d_1$. Supposons aussi que ${}^a(w_1, \dots, w_d) = (w_d, w_1, \dots, w_{d-1})$. Alors $G_1 \simeq (G^\circ)^a$ et, via cet isomorphisme,

$$\pi_a(w_1, \dots, w_d) = w_1 \dots w_d$$

et

$$\begin{aligned} \text{Irr } G_1 &\longrightarrow (\text{Irr } G^\circ)^a \\ \chi &\longmapsto \underbrace{\chi \otimes \dots \otimes \chi}_{d \text{ fois}} \end{aligned}$$

est la bijection réciproque de la bijection 27.4. \square

27.B. Induction. Fixons maintenant $a \in A$ et une famille $(H_{ij})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq d_i}$, où H_{ij} est un sous-groupe de G_i . On pose

$$H^\circ = \prod_{i=1}^r (H_{i1} \times \cdots \times H_{id_i})$$

et on suppose que H° est a -stable. Alors la restriction de π_a à $H^\circ a$ est l'analogue de π_a pour le groupe H° et on a encore une isométrie toujours notée $\pi_a^* : \text{Cent}((H^\circ)^a) \rightarrow \text{Cent}(H^\circ a)$. D'autre part, il résulte de [Bon2, lemme 3.2.1] que le diagramme

$$(27.8) \quad \begin{array}{ccc} \text{Cent}((H^\circ)^a) & \xrightarrow{\pi_a^*} & \text{Cent}(H^\circ a) \\ \text{Ind}_{(H^\circ)^a}^{(G^\circ)^a} \downarrow & & \downarrow \text{Ind}_{H^\circ a}^{G^\circ a} \\ \text{Cent}((G^\circ)^a) & \xrightarrow{\pi_a^*} & \text{Cent}(G^\circ a) \end{array}$$

est commutatif.

Proposition 27.9. *On a :*

(a) *Si $\chi \in (\text{Irr } G^\circ)^a$, alors*

$$\text{Ind}_{G^\circ a}^G \tilde{\chi}_a = \sum_{\xi \in \text{Irr } G(\chi)/G^\circ} \overline{\xi(a)} \text{Ind}_{G(\chi)}^G (\tilde{\chi} \otimes \xi).$$

(b) *L'application $\text{Ind}_{G^\circ a}^G$ a pour image l'espace des fonctions centrales sur G qui s'annulent en dehors de $G^\circ[a]$, où $[a]$ est la classe de conjugaison de a dans A .*

DÉMONSTRATION - (a) Par la transitivité de l'induction, on peut supposer, et nous le ferons, que $G(\chi) = G$. Notons $A' = \langle a \rangle$ et $G' = G^\circ \rtimes A'$. Nous noterons $\tilde{\chi}'$ la restriction de $\tilde{\chi}$ à G' . D'après 1.3, on a

$$\text{Ind}_{G^\circ a}^G \tilde{\chi}_a = \text{Ind}_{G'}^G \left(\sum_{\xi \in A'^\wedge} \xi(a)^{-1} (\tilde{\chi}' \otimes \xi) \right).$$

Par conséquent,

$$\text{Ind}_{G^\circ a}^G \tilde{\chi}_a = \tilde{\chi} \otimes \left(\text{Ind}_{A'}^A \left(\sum_{\xi \in A'^\wedge} \xi(a)^{-1} \xi \right) \right).$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que

$$\text{Ind}_{A'}^A \left(\sum_{\xi \in A'^\wedge} \overline{\xi(a)} \xi \right) = \sum_{\xi \in \text{Irr } A} \overline{\xi(a)} \xi,$$

ce qui est évident.

(b) D'après les formules données dans la preuve de 1.3, l'application $\text{Ind}_{G^\circ a}^{G'}$ a pour image l'espace des fonctions centrales sur G' nulles en dehors de $G^\circ a$. (b) en découle car toute classe de conjugaison de G contenue dans $G^\circ[a]$ rencontre $G^\circ a$. ■

28. PRODUITS EN COURONNE DE GROUPES SYMÉTRIQUES

Nous ferons dans cette section l'hypothèse suivante :

Hypothèse : *Jusqu'à la fin de cette section, nous fixons une famille d'entiers naturels non nuls $(n_i)_{1 \leq i \leq r}$ et nous supposons que $G_i = \mathfrak{S}_{n_i}$, le groupe symétrique de degré n_i .*

Fixons un entier $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Notons $\varepsilon_i : G_i \rightarrow \{1, -1\}$ la signature. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_x)$ est une partition de n_i , nous noterons $G_{i,\lambda}$ le sous-groupe (parabolique) de G_i isomorphe à $\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_x}$ (sous-groupe de Young). Nous noterons λ^* la partition duale de λ . Nous noterons b_λ le nombre de transpositions contenues dans G_{i,λ^*} : on a

$$b_\lambda = \sum_{j=1}^x (j-1)\lambda_j.$$

Par exemple, $b_{(n_i)} = 0$. Notons χ_λ l'unique caractère irréductible commun à $\text{Ind}_{G_{i,\lambda}}^{G_i} 1_{G_{i,\lambda}}$ et $\varepsilon_i \otimes \text{Ind}_{G_{i,\lambda^*}}^{G_i} 1_{G_{i,\lambda^*}}$ (voir [GP, théorème 5.4.7]). Toujours d'après [GP, théorème 5.4.7], on a

$$(28.1) \quad \text{Ind}_{G_{i,\lambda}}^{G_i} 1_{G_{i,\lambda}} = \chi_\lambda + \sum_{\substack{\mu \vdash n_i \\ b_\mu < b_\lambda}} \beta_{\lambda\mu} \chi_\mu.$$

Revenons à notre groupe G° . Nous noterons \mathcal{P} l'ensemble des familles $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq d_i}$ où λ_{ij} est une partition de n_i . Le groupe A agit naturellement sur \mathcal{P} par permutations. Nous posons alors $b_\lambda = \sum_{i,j} b_{\lambda_{ij}}$,

$$G_\lambda^\circ = \prod_{i=1}^r (G_{i,\lambda_{i1}} \times \dots \times G_{i,\lambda_{id_i}})$$

et nous notons A_λ le stabilisateur de λ dans A , c'est-à-dire le normalisateur de G_λ° dans A . On pose

$$G_\lambda = G_\lambda^\circ \rtimes A_\lambda.$$

Nous noterons χ_λ le caractère irréductible de G° défini par

$$\chi_\lambda = \bigotimes_{i=1}^r (\chi_{\lambda_{i1}} \otimes \dots \otimes \chi_{\lambda_{id_i}}).$$

Il est facile de vérifier que

$$A(\chi_\lambda) = A_\lambda.$$

Notons \mathcal{P}^+ l'ensemble des couples (λ, ξ) tels que $\lambda \in [\mathcal{P}/A]$ et $\xi \in \text{Irr } A_\lambda$. Posons maintenant

$$\chi_{\lambda,\xi}^+ = \text{Ind}_{G^\circ \rtimes A_\lambda}^{G_\lambda} (\chi_\lambda \otimes \xi)$$

et

$$\Pi_{\lambda,\xi} = \text{Ind}_{G_\lambda}^{G^\circ} \xi.$$

Alors l'application $\mathcal{P}^+ \rightarrow \mathcal{I}(G^\circ, A)$, $(\lambda, \xi) \mapsto (\chi_\lambda, \xi)$ induit une bijection entre \mathcal{P}^+ et $\mathcal{I}(G^\circ, A)/A$. Par conséquent, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+ &\longrightarrow \text{Irr } G \\ (\lambda, \xi) &\longmapsto \chi_{\lambda,\xi}^+ \end{aligned}$$

est bijective.

Proposition 28.2. *Si $(\lambda, \xi) \in \mathcal{P}^+$, alors*

$$\Pi_{\lambda,\xi} = \chi_{\lambda,\xi}^+ + \sum_{\substack{(\mu, \xi') \in \mathcal{P}^+ \\ b_\mu < b_\lambda}} \beta_{\lambda,\xi,\mu,\xi'} \chi_{\mu,\xi'}^+,$$

où $\beta_{\lambda,\xi,\mu,\xi'} \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION - Tout d'abord, remarquons que, si le résultat de la proposition est vrai lorsque $A = A_\lambda$, alors il est vrai dans le cas général. Nous pouvons donc supposer, et nous le ferons, que $A = A_\lambda$.

Soit $(\mu, \xi') \in \mathcal{P}^+$ tel que $\langle \Pi_{\lambda,\xi}, \chi_{\mu,\xi'}^+ \rangle_G \neq 0$. Alors

$$\langle \text{Res}_{G^\circ}^G \Pi_{\lambda,\xi}, \text{Res}_{G^\circ}^G \chi_{\mu,\xi'}^+ \rangle_{G^\circ} \neq 0.$$

Mais, par la formule de Mackey

$$\text{Res}_{G^\circ}^G \Pi_{\lambda,\xi} = \xi(1) \sum_{a \in [A/A_\lambda]} \text{Ind}_{G_{a\lambda}^\circ}^{G^\circ} 1_{G_{a\lambda}^\circ}$$

et

$$\text{Res}_{G^\circ}^G \chi_{\mu, \xi'}^+ = \xi(1) \sum_{a \in [A/A_\mu]} \chi^a \mu.$$

Par suite, il existe $a \in A$ tel que $\langle \text{Ind}_{G_{a_\lambda}^\circ}^{G^\circ} 1_{G_{a_\lambda}^\circ}, \chi_\mu \rangle_{G^\circ} \neq 0$. D'après 28.1, ceci implique que $\mu = {}^a \lambda$ ou que $b_\mu < b_{a_\lambda} = b_\lambda$. Dans le premier cas, on a alors $\lambda = \mu$ car λ et μ parcourent $[\mathcal{P}/A]$. Il nous reste donc à montrer que, si ξ et ξ' sont deux caractères irréductibles de A_λ , alors

$$(*) \quad \langle \Pi_{\lambda, \xi}, \chi_{\lambda, \xi'}^+ \rangle_G = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \xi' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $A = A_\lambda$, on a

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{\lambda, \xi}, \chi_{\lambda, \xi'}^+ \rangle_G &= \langle \xi, \xi' \otimes \text{Res}_{G_\lambda}^G \tilde{\chi}_\lambda \rangle_{G_\lambda} \\ &= \frac{1}{|A_\lambda|} \sum_{a \in A_\lambda} \xi(a) \overline{\xi'(a)} \left(\frac{1}{|G_\lambda^\circ|} \sum_{w \in G_\lambda^\circ} \tilde{\chi}_\lambda(wa) \right). \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de montrer que, pour tout $a \in A_\lambda$,

$$(**) \quad \frac{1}{|G_\lambda^\circ|} \sum_{w \in G_\lambda^\circ} \tilde{\chi}_\lambda(wa) = 1.$$

mais,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G_\lambda^\circ|} \sum_{w \in G_\lambda^\circ} \tilde{\chi}_\lambda(wa) &= \langle 1_{G_\lambda^\circ a}, \text{Res}_{G_\lambda^\circ a}^G \tilde{\chi}_\lambda \rangle_{G_\lambda^\circ a} \\ &= \langle \text{Ind}_{G_\lambda^\circ a}^{G^\circ a} 1_{G_\lambda^\circ a}, \text{Res}_{G_\lambda^\circ a}^G \tilde{\chi}_\lambda \rangle_{G^\circ a} \\ &= \langle \text{Ind}_{(G_\lambda^\circ a)}^{(G^\circ a)} 1_{(G_\lambda^\circ a)}, (\chi_\lambda)_a \rangle_{(G^\circ a)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité découlant de la commutativité du diagramme 27.8, la dernière découlant de la formule 28.1 appliquée au groupe $(G^\circ)^a$. ■

Les deux corollaires suivants découlent facilement (par une récurrence descendante sur b_λ) de la proposition 28.2.

Corollaire 28.3. $\mathbb{Z} \text{Irr } G = \bigoplus_{(\lambda, \xi) \in \mathcal{P}^+} \mathbb{Z} \Pi_{\lambda, \xi}.$

Corollaire 28.4. Soit $\eta \in \text{Cent}(G)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\eta \in \mathbb{Z} \text{Irr } G$.
- (2) Pour tout $(\lambda, \xi) \in \mathcal{P}^+$, $\langle \text{Res}_{G_\lambda}^G \eta, \xi \rangle_{G_\lambda} \in \mathbb{Z}$.

29. EXTENSION CANONIQUE, EXTENSION PRÉFÉRÉE

Soit (W°, S) un groupe de Coxeter cristallographique fini. Notons $\text{Aut}_{\text{Coxeter}}(W^\circ, S)$ le groupe des automorphismes σ de W° tels que $\sigma(S) = S$. Fixons un groupe fini A et un morphisme de groupes $A \rightarrow \text{Aut}_{\text{Coxeter}}(W^\circ, S)$. À travers ce morphisme, A agit sur W° et on peut former le produit semi-direct $W = W^\circ \rtimes A$.

Soit χ un caractère irréductible de W° . Si $a \in A(\chi)$, Lusztig [Lu6, chapitre IV, §17] a défini une extension de χ à $W^\circ \rtimes \langle a \rangle$, appelée *extension préférée* dont une des propriétés est que la représentation sous-jacente est définie sur \mathbb{Q} . Nous voulons montrer ici la proposition suivante :

Proposition 29.1. *Il existe une unique extension de χ à $W^\circ \rtimes A(\chi)$ dont la restriction à tout sous-groupes $W^\circ \rtimes \langle a \rangle$, où a parcourt $A(\chi)$, soit l'extension préférée de Lusztig.*

DÉMONSTRATION - L'unicité de l'extension vérifiant les conditions de l'énoncé est évidente. Montrons en l'existence. Tout d'abord, nous pouvons travailler à conjugaison près par un élément de A en raison du lemme suivant (dont la preuve est immédiate) :

Lemme 29.2. *Soient a et b deux éléments de A . Notons $\tilde{\chi}$ l'extension préférée de Lusztig à $W^\circ \rtimes \langle a \rangle$. Alors ${}^b\tilde{\chi}$ est l'extension préférée de Lusztig de ${}^b\chi$ à $W^\circ \rtimes \langle bab^{-1} \rangle$.*

Nous pouvons supposer, et nous le ferons, que $A = \text{Aut}_{\text{Coxeter}}(W^\circ, S)$ et que le morphisme $A \rightarrow \text{Aut}_{\text{Coxeter}}(W^\circ, S)$ est l'identité. Par produit direct, on peut aussi supposer, et nous le ferons, que $A(\chi)$ agit transitivement sur l'ensemble des composantes irréductibles de W° . En d'autres termes, W° est un produit direct de d copies d'un groupe de Coxeter cristallographique fini irréductible (W_1, S_1) , on peut écrire $\chi = \chi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \chi_d$ où, pour tout i , χ_i est un caractère irréductible de W_1 , $A = (A_1)^d \rtimes \mathfrak{S}_d$, où $A_1 = \text{Aut}_{\text{Coxeter}}(W_1, S_1)$ et l'image de $A(\chi)$ dans \mathfrak{S}_d est un sous-groupe transitif de \mathfrak{S}_d .

Soit $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Puisque l'image de $A(\chi)$ dans \mathfrak{S}_d est un sous-groupe transitif, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ et $(b_1, \dots, b_d) \in (A_1)^d$ tels que $\sigma(1) = i$ et $\sigma.(b_1, \dots, b_d) \in A(\chi)$. En particulier, ${}^{b_i}\chi_i = \chi_1$. Par conséquent, il existe $(a_1, \dots, a_d) \in (A_1)^d$ tels que, pour tout i , on ait $\chi_i = {}^{a_i}\chi_1$.

Notons τ le cycle de longueur d égal à $(1, 2, \dots, d)$. Alors, quitte à remplacer χ par ${}^{(a_1, \dots, a_d)}\chi$ (en utilisant le lemme 29.2), on peut supposer, et nous le ferons, que $\chi_1 = \cdots = \chi_d$. En particulier, $A(\chi) = A_1(\chi_1)^d \rtimes \mathfrak{S}_d$.

Supposons démontré le résultat lorsque $d = 1$. Notons alors $\tilde{\chi}_1$ l'extension de χ_1 à $W_1 \rtimes A_1(\chi_1)$ telle que $\text{Res}_{W_1 \rtimes \langle a \rangle}^{W_1 \rtimes A_1(\chi_1)} \tilde{\chi}_1$ soit l'extension préférée de χ_1 à $W_1 \rtimes A_1(\chi_1)$. Alors l'extension canonique de $\tilde{\chi}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\chi}_1$ à $W = (W_1 \rtimes A_1)^d \rtimes \mathfrak{S}_d$ vérifie les conditions de l'énoncé.

On est donc ramené au cas où $d = 1$, c'est-à-dire au cas où $W^\circ = W_1$ est irréductible. On peut même supposer que $A(\chi_1) \neq 1$. Dans ce cas, à part lorsque W_1 est de type D_4 , A_1 est cyclique d'ordre 2 et le résultat est évident. Supposons donc que W° est de type D_4 . Alors $A \simeq \mathfrak{S}_3$. Deux cas peuvent se produire :

- Si 3 ne divise pas $|A(\chi)|$, alors $|A(\chi)| = 2$ et le résultat est évident.
- Si 3 divise $|A(\chi)|$, alors, d'après [Lu5, proposition 3.2], $A(\chi) = A$ et il existe une extension $\tilde{\chi}'$ de χ à $W^\circ \rtimes A(\chi)$ dont la restriction à $W^\circ \rtimes \langle b \rangle$ est l'extension préférée de Lusztig lorsque $b \in A$ est d'ordre 3. Notons ε le caractère signature de $A \simeq \mathfrak{S}_3$. Il est alors clair que $\tilde{\chi}'$ ou $\tilde{\chi}' \otimes \varepsilon$ satisfait aux conditions de la proposition. ■

L'extension de χ vérifiant les conditions de la proposition précédente sera appelée l'*extension préférée* de χ à $W^\circ \rtimes A(\chi)$.

Corollaire 29.3. *Si A agit sur W° seulement par permutation des composantes irréductibles, alors l'extension préférée de χ à $W^\circ \rtimes A(\chi)$ est l'extension canonique.*

Corollaire 29.4. *Soit A' un sous-groupe de A et posons $W' = W^\circ \rtimes A'$. Soit $\chi \in \text{Irr } W^\circ$ et notons $\tilde{\chi}$ (respectivement $\tilde{\chi}'$) l'extension canonique de χ à $W(\chi)$ (respectivement $W'(\chi)$). Alors $\tilde{\chi}'$ est la restriction de $\tilde{\chi}$.*

Appendice B. Sommes de Gauss

Le but de cet appendice est de donner des formules pour les racines de l'unité $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$ lorsque $\zeta \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ est F -stable. D'après [DiLeMi2, proposition 2.4], $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$ peut être décrit par un produit de *sommes de Gauss*. Dans la section 30, nous rappelons quelques propriétés générales des sommes de Gauss. Nous appliquons ces résultats dans la section 31 pour calculer explicitement les racines de l'unité.

NOTATION - Nous noterons r l'entier naturel non nul tel que $q = p^r$.

30. SOMMES DE GAUSS

Un caractère additif $\chi_1 : \mathbb{F}_p \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ non trivial a été fixé dans le §14.B. Si $s \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\chi_s : \mathbb{F}_{p^s} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ est défini par $\chi_s = \chi_1 \circ \text{Tr}_s$, où $\text{Tr}_s : \mathbb{F}_{p^s} \rightarrow \mathbb{F}_p$ est la trace. Si $s \in \mathbb{N}^*$ et si $\theta : \mathbb{F}_{p^s}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ est un caractère linéaire, nous noterons

$$\mathcal{G}_s(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{F}_{p^s}^\times} \theta(x) \chi_s(x)$$

la *somme de Gauss* associée. La première identité sur les sommes de Gauss est bien connue : si θ est non trivial, alors

$$(30.1) \quad \mathcal{G}_s(\theta) \mathcal{G}_s(\theta^{-1}) = p^s \theta(-1).$$

Nous allons maintenant traiter un cas particulier intervenant dans le groupe spécial unitaire (voir la preuve de la proposition 31.4). Il s'agit des sommes de Gauss de la forme $\mathcal{G}_{2r}(\theta)$, où θ est un caractère linéaire non trivial de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ tel que $\theta^{q+1} = 1$ (rappelons que $q = p^r$). Tout d'abord, notons qu'un tel caractère est trivial sur \mathbb{F}_q^\times (surjectivité de la norme). Il découle alors de la formule 30.1 que $\mathcal{G}(\theta) = \pm q$. Nous allons déterminer exactement le signe.

Pour cela, notons $\text{Tr} : \mathbb{F}_{q^2} \rightarrow \mathbb{F}_q$ la trace. Elle est surjective et \mathbb{F}_q -linéaire. Donc il existe $\xi \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ tel que $\text{Tr} \xi = 0$, de sorte que $\text{Ker Tr} = \mathbb{F}_q \xi$. Si q est pair, alors $\text{Ker Tr} = \mathbb{F}_q$ (donc on peut prendre $\xi = 1$). Si q est impair, ξ est un élément de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ tel que ξ^2 appartient à \mathbb{F}_q mais n'est pas le carré d'un élément de \mathbb{F}_q . Alors, si θ est un caractère linéaire non trivial de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ tel que $\theta^{q+1} = 1$, on a

$$(30.2) \quad \mathcal{G}_{2r}(\theta) = \theta(\xi)q.$$

REMARQUE - On a toujours $\xi^2 \in \mathbb{F}_q^\times$, donc $\theta(\xi) \in \{1, -1\}$. De plus $\theta(\xi)$ ne dépend pas du choix de ξ . Notons aussi que, si q est pair, on a $\xi \in \mathbb{F}_q^\times$ donc $\theta(\xi) = 1$. \square

PREUVE DE 30.2 - Nous remercions J.L. Waldspurger pour nous avoir présenté la formule 30.2 ainsi que l'argument suivant. Tout d'abord, puisque θ est trivial sur \mathbb{F}_q^\times , on a

$$\mathcal{G}_{2r}(\theta) = \frac{1}{q-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} \sum_{y \in \mathbb{F}_q^\times} \theta(xy) \chi_r(\text{Tr}(x)).$$

Par un changement de variable évident, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2r}(\theta) &= \frac{1}{q-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} \sum_{y \in \mathbb{F}_q^\times} \theta(x) \chi_r(y \text{Tr}(x)) \\ &= \frac{1}{q-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} \theta(x) \left(\sum_{y \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_r(y \text{Tr}(x)) \right) \\ &= \frac{1}{q-1} \left((q-1) \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \cap \text{Ker Tr}} \theta(x) - \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \\ \text{Tr } x \neq 0}} \theta(x) \right) \\ &= \frac{1}{q-1} \left(q \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \cap \text{Ker Tr}} \theta(x) - \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} \theta(x) \right) \end{aligned}$$

Puisque θ est non trivial, la deuxième somme est nulle. Puisque $\text{Ker Tr} = \mathbb{F}_q \xi$ et que θ est trivial sur \mathbb{F}_q^\times , la première somme vaut $(q-1)\theta(\xi)$. Au bilan, il nous reste $\mathcal{G}_{2r}(\theta) = \theta(\xi)q$. ■

Nous terminons cette section par un cas particulier classique, dû à Gauss. Supposons ici p impair. Soit $\mathcal{L}_s : \mathbb{F}_{p^s}^\times \rightarrow \{1, -1\}$ le *caractère de Legendre*, c'est-à-dire l'unique caractère d'ordre 2. La formule 30.1 montre que $\lambda_s = p^{-s/2} \mathcal{G}_s(\mathcal{L}_s)$ est une racine quatrième de l'unité. Sa valeur dépend du choix de χ_1 ainsi que du choix d'une racine carrée de p dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Posons $i = \tilde{j}(1/4)$ (rappelons que $j : \mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est le morphisme de groupe de noyau \mathbb{Z} défini dans la sous-section 1.B). Alors i est une racine primitive quatrième de l'unité. Si $p \equiv 1 \pmod{4}$, on prend $p^{1/2} = \mathcal{G}_1(\mathcal{L}_1)$. Si $p \equiv 3 \pmod{4}$, on prend $p^{1/2} = i^{-1} \mathcal{G}_1(\mathcal{L}_1)$. Il résulte de 30.1 que $p^{1/2}$ est alors une racine carrée de p . Alors, d'après [Ga, VII.356], on a

$$(30.3) \quad \lambda_s = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ i^s & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

31. CALCUL DE $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$

31.A. Propriétés générales. Rappelons qu'il a été fixé un morphisme injectif $\kappa : \mathbb{F}^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ qui fournit, par restriction à \mathbb{F}_q^\times un caractère linéaire que l'on notera encore κ . Avant d'exprimer $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$ sous forme d'un produit de $\mathcal{G}_s(\kappa^m)$, nous aurons besoin de quelques notations. Notons $(\varpi_\alpha^\vee)_{\alpha \in \Delta_0}$ la \mathbb{Q} -base de $Y(\mathbf{T}_0/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ)$ duale de Δ_0 . Notons Δ_0/ϕ_0 l'ensemble des orbites de ϕ_0 dans Δ_0 . Pour finir, si $\omega \in \Delta_0/\phi_0$, notons $\alpha_\omega \in \omega$ un représentant et r_ω l'entier naturel non nul tel que $F^{|\omega|}(\alpha_\omega) = p^{r_\omega} \alpha_\omega$.

Soit $\zeta \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$. Fixons $\dot{\zeta} \in X(\mathbf{T}_0/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ)$ tel que $\zeta = \kappa \circ \text{Res}_{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}^{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ} \dot{\zeta}$. Alors, d'après [DiLeMi2, proposition 2.4], on a $(q^{|\omega|} - 1) < \dot{\zeta}, \varpi_\alpha^\vee >_{\mathbf{T}_0} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\omega \in \Delta_0/\phi_0$ (car $(F-1)(\dot{\zeta})$ est trivial sur $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$) et

$$(31.1) \quad \mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \eta_{\mathbf{G}} q^{-\frac{1}{2} \text{rg}_{\text{sem}}(\mathbf{G})} \prod_{\omega \in \Delta_0/\phi_0} \mathcal{G}_{r_\omega}(\kappa^{(p^{r_\omega}-1) < \dot{\zeta}, \varpi_\alpha^\vee >_{\mathbf{T}_0}}).$$

Il est immédiat que le membre de droite ne dépend pas du choix de κ , ce qui est souhaitable. Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés des nombres $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$.

Soit $\hat{\mathbf{G}}$ un groupe réductif connexe muni d'un endomorphisme de Frobenius $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ défini sur \mathbb{F}_q et soit $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ est un morphisme isotypique défini sur \mathbb{F}_q . Alors π induit un morphisme surjectif $\mathcal{Z}(\hat{\mathbf{G}}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et, si on note alors $\hat{\zeta} = \zeta \circ \pi \in \mathcal{Z}(\hat{\mathbf{G}})^\wedge$, alors il découle facilement de 31.1 que

$$(31.2) \quad \mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \mathcal{G}(\hat{\mathbf{G}}, \hat{\zeta}).$$

D'autre part, si $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \times \cdots \times \mathbf{G}_0$ (k fois) et si F permute transitivement les composantes \mathbf{G}_0 , notons $\zeta_0 \in H^1(F^k, \mathcal{Z}(\mathbf{G}_0))$ le caractère correspondant à ζ . On a alors, d'après [DiLeMi2, preuve de la proposition 2.5],

$$(31.3) \quad \mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \mathcal{G}(\mathbf{G}_0, \zeta_0).$$

Ici, $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta_0)$ est calculé en utilisant l'isogénie F^k .

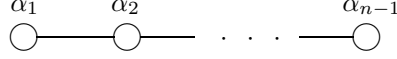
31.B. Cas cuspidal. Nous supposons maintenant que $\zeta \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ et que ζ est F -stable. Alors toutes les composantes irréductibles de \mathbf{G} sont de type A . Par suite, compte tenu de 31.2 et 31.3, il suffit de calculer $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$ lorsque $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$ et $F = \sigma^k \circ F_{\text{nat}}$, où $k \in \{0, 1\}$, $F_{\text{nat}} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ est l'endomorphisme de Frobenius déployé sur \mathbb{F}_q et $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$, $g \mapsto J^t g^{-1} J$. Ici, J désigne la matrice monomiale dont les coefficients sur la deuxième diagonale sont tous égaux à 1.

Proposition 31.4. *Supposons que $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$ et que $F = \sigma^k \circ F_{\text{nat}}$, où $k \in \{0, 1\}$. On pose $\varepsilon = (-1)^k$. Soit $\zeta \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ et supposons que ζ est F -stable. Alors ζ est d'ordre n , n divise $q - \varepsilon$, et :*

$$\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -\lambda_r(-1)^{\frac{(q-\varepsilon)(n-2)}{8}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

REMARQUE - La formule de la proposition précédente est close grâce à 30.3. □

DÉMONSTRATION - Le fait que ζ est d'ordre n découle de la table 7.3. Par conséquent, ζ est injectif et F -stable, donc F agit trivialement sur $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Par conséquent, n divise $q - \varepsilon$ car F agit sur $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ par élévation à la puissance εq . En particulier, n est premier à p . Nous aurons besoin de quelques notations. On numérote les $n - 1$ racines simples comme suit :



Notons pour simplifier $\varpi_j^\vee = \varpi_{\alpha_j}^\vee$ pour $1 \leq j \leq n - 1$. Il existe alors un entier $k \in \mathbb{Z}$ premier à n tel que, pour tout $1 \leq j \leq n - 1$, on ait

$$\langle \zeta, \varpi_j^\vee \rangle_{\mathbf{T}_0} = \frac{kj}{n}.$$

• Commençons par étudier le cas déployé (c'est-à-dire $k = 0$, ou encore $\varepsilon = 1$). Alors ϕ_0 est l'identité et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) &= (-1)^{n-1} q^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{G}_r((\kappa^{(q-1)/n})^{kj}) \\ &= (-1)^{n-1} q^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{G}_r((\kappa^{(q-1)/n})^j), \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de ce que k est premier à n . Notons γ le caractère linéaire $\kappa^{(q-1)/n}$ de \mathbb{F}_q^\times . En regroupant j et $n - j$ et en utilisant 30.1, on obtient :

$$\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \begin{cases} \gamma(-1)^{1+2+\dots+\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -\lambda_r \gamma(-1)^{1+2+\dots+\frac{n-2}{2}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Puisque $\kappa(-1) = -1$, on a $\gamma(-1) = (-1)^{(q-1)/n}$. Cela montre le résultat annoncé lorsque n est pair. Lorsque n est impair, la simplification provient du fait que $\gamma(-1)^2 = \gamma(-1)^n = 1$ et donc que $\gamma(-1) = 1$.

• Étudions maintenant le cas où $k = 1$, c'est-à-dire $\varepsilon = -1$. Alors $\phi_0(\alpha_j) = \alpha_{n-j}$ pour tout $1 \leq j \leq n - 1$. Deux cas se présentent :

$$\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \begin{cases} q^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{(n-1)/2} \mathcal{G}_{2r}((\kappa^{(q^2-1)/n})^{kj}) & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -\lambda_r q^{-\frac{n-2}{2}} \prod_{j=1}^{(n-2)/2} \mathcal{G}_{2r}((\kappa^{(q^2-1)/n})^{kj}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons γ la restriction de $\kappa^{k(q^2-1)/n}$ à $\mathbb{F}_{q^2}^\times$. Alors γ est non trivial et $\gamma^{q+1} = 1$ car n divise $q + 1 = q - \varepsilon$. Notons, comme dans la preuve de 30.2, ξ un générateur du noyau de la trace $\text{Tr} : \mathbb{F}_{q^2} \rightarrow \mathbb{F}_q$. D'après 30.2, on a

$$\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \begin{cases} \gamma(\xi)^{1+2+\dots+\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -\lambda_r \gamma(\xi)^{1+2+\dots+\frac{n-2}{2}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Lorsque n est impair, alors $\gamma(\xi)^2 = \gamma(\xi)^n = 1$ (car $\xi^2 \in \mathbb{F}_q^\times$ et γ est trivial sur \mathbb{F}_q^\times) et donc $\gamma(\xi) = 1$, ce qui montre le résultat attendu. Supposons maintenant n pair. Alors q et k sont impairs et on peut prendre $\xi = \xi_0^{(q+1)/2}$, où ξ_0 est un générateur de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$. On a alors $\gamma(\xi) = \kappa(\xi_0^{(q^2-1)/2})^{k(q+1)/n}$. Or, $\xi_0^{(q^2-1)/2} = -1$, donc $\gamma(\xi) = (-1)^{k(q+1)/n} = (-1)^{(q+1)/n}$. Cela termine la preuve de la proposition. ■

RÉFÉRENCES

- [As] T. ASAI, *Twisting operators on the space of class functions of finite special linear groups*, Proc. Symp. in Pure Math. **47** (1987), 99-148.
- [BeCu] C.T. BENSON & C.W. CURTIS, *On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups*, Trans. A.M.S. **165** (1972), 251-273.
- [Bon1] C. BONNAFÉ, *Foncteurs de Lusztig dans le groupe spécial linéaire sur un corps fini*, Ph.D. Thesis, University of Paris VII, 1996.
- [Bon2] C. BONNAFÉ, *Produits en couronne de groupes linéaires*, J. of Algebra **211** (1999), 57-98.
- [Bon3] C. BONNAFÉ, *Regular unipotent elements*, C.R. Acad. Sci. Paris **328**, Série I (1999), 275-280.
- [Bon4] C. BONNAFÉ, *Mackey formula in type A*, Proc. London Math. Soc. **80** (2000), 545-574 ; *Corrigenda: "Mackey formula in type A"*, Proc. London Math. Soc. **86** (2003), 435-442.
- [Bon5] C. BONNAFÉ, *Opérateurs de torsion dans $SL_n(q)$ et $SU_n(q)$* , Bull. Soc. Math. France **128** (2000), 309-345.
- [Bon6] C. BONNAFÉ, *Éléments unipotents réguliers des sous-groupes de Levi*, Canad. J. Math. **56** (2004), 246-276.
- [Bon7] C. BONNAFÉ, *Actions of relative Weyl groups I*, J. Group Theory **7** (2004), 1-37 ; *Actions of relative Weyl groups II*, à paraître dans J. of Group Theory.
- [Bon8] C. BONNAFÉ, *Quasi-isolated elements in reductive groups*, à paraître dans Comm. in Alg.
- [BoMi] C. BONNAFÉ & J. MICHEL, *Mackey formula for Lusztig induction and restriction*, en préparation.
- [Bor] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics **126** (1991).
- [BorTi] A. BOREL & J. TITS, *Groupes réductifs*, Publ. Math. IHES **27** (1965), 55-160.
- [Bou1] N. BOURBAKI, *Algèbre, chapitre VII : modules sur les anneaux principaux*, Actualités Sci. Ind. **1179**, Hermann et Cie, Paris, 1952, 159 pages.
- [Bou2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V et VI*, Hermann, Paris (1968).
- [CaEn] M. CABANES & M. ENGUEHARD, *Representation theory of finite reductive groups*, New Math. Monograph **1**, Cambridge University Press (2004).
- [DeLu1] P. DELIGNE & G. LUSZTIG, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. (2) **103** (1976), 103-161.
- [DeLu2] P. DELIGNE & G. LUSZTIG, *Duality for representations of a reductive group over a finite field*, J. of Alg. **81** (1983), 540-545.
- [DiLeMi1] F. DIGNE, G. LEHRER & J. MICHEL, *The characters of the group of rational points of a reductive group with non-connected centre*, J. Reine Angew. Math. **425** (1992), 155-192.
- [DiLeMi2] F. DIGNE, G. LEHRER & J. MICHEL, *On Gelfand-Graev characters of reductive groups with non-connected centre*, J. reine. angew. Math. **491** (1997), 131-147.
- [DiMi1] F. DIGNE & J. MICHEL, *On Lusztig's parametrization of characters of finite groups of Lie type*, Astérisque **181-182** (1990), 113-156.
- [DiMi2] F. DIGNE & J. MICHEL, *Representations of finite groups of Lie type*, in London Math. Soc. Students Texts, Vol. **21**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1991.
- [DiMi2] F. DIGNE & J. MICHEL, *Groupes réductifs non connexes*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **27** (1994), 345-406.
- [Fr] F.G. FROBENIUS, *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Preuß. Akad. Wiss. (1900), pp 516-534 (\simeq Ges. Abhandlungen **3**, pp 148-166).
- [Ga] C.F. GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae* (1802).
- [Ge] M. GECK, *A note on Harish-Chandra induction*, Manuscripta Math. **80** (1993), 393-401.
- [GP] M. GECK & G. PFEIFFER, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, L.M.S. Monographs New Series **21**, Oxford Science Publications, 2000.
- [Gr] J.A. GREEN, *The characters of the finite general linear groups*, Trans. A.M.S. **80** (1955), 402-447.
- [Ho] R.B. HOWLETT, *Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups*, J. London Math. Soc. (2) **21** (1980), 62-80.
- [HoLe1] R. HOWLETT & G. LEHRER, *Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings*, Invent. Math. **58** (1980), 37-64.
- [HoLe2] R. HOWLETT & G. LEHRER, *Representations of generic algebras and finite groups of Lie type*, Trans. A.M.S **280** (1983), 753-779.
- [Jo] H. JORDAN, *Group-Characters of various types of linear groups*, Amer. J. of Math. **29** (1907).
- [Le1] G.I. LEHRER, *On the discrete series characters of linear groups*, Ph. D. Thesis, University of Warwick (1971).
- [Le2] G.I. LEHRER, *The characters of the finite special linear groups*, J. Algebra **26** (1973), 564-583.

- [Lu1] G. LUSZTIG, *On the finiteness of the number of unipotent classes*, Invent. Math. **34** (1976), 201-213.
- [Lu2] G. LUSZTIG, *Representations of finite Chevalley groups*, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. **39** (1977).
- [Lu3] G. LUSZTIG, *Irreducible representations of finite classical groups*, Invent. Math. **43** (1977), 125-175.
- [Lu4] G. LUSZTIG, *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent. Math. **75** (1984), 205-272.
- [Lu5] G. LUSZTIG, *Characters of reductive groups over finite fields*, Annals of Math. Studies **107** (1984), Princeton University Press.
- [Lu6] G. LUSZTIG, *Character sheaves I*, Adv. in Math. **56** (1985), 193-237 ; *Character sheaves II*, Adv. in Math. **57** (1985), 226-265 ; *Character sheaves III*, Adv. in Math. **57** (1985), 266-315 ; *Character sheaves IV*, Adv. in Math. **59** (1986), 1-63 ; *Character sheaves V*, Adv. in Math. **61** (1986), 103-155.
- [Lu7] G. LUSZTIG, *On the representations of reductive groups with non connected center*, Astérisque **168** (1988), 157-166.
- [Lu8] G. LUSZTIG, *Green functions and character sheaves*, Ann. of Math. **131** (1990), 355-408.
- [LuSpa] G. LUSZTIG & N. SPALTENSTEIN, *Induced unipotent classes*, J. of the London. Math. Soc. (2) **19** (1979), 41-52.
- [LuSr] G. LUSZTIG & B. SRINIVASAN, *The characters of the finite unitary groups*, J. of Alg. **49** (1977), 167-171.
- [Sc] I. SCHUR, *Untersuchungen über die Darstellung des endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. für Math. **132** (1907).
- [Sh1] T. SHOJI, *Character sheaves and almost characters of reductive groups I, II*, Adv. in Math. **111** (1995), 244-313, 314-354.
- [Sh2] T. SHOJI, *Shintani descent for special linear groups*, J. of Algebra **199** (1998), 175-228.
- [Sh3] T. SHOJI, *Lusztig's conjecture for finite special linear groups*, preprint **math.RT/0502180** (2005).
- [SprSt] T.A. SPRINGER & R. STEINBERG, *Conjugacy classes*, Seminar in algebraic groups and related finite groups, Lect. Notes in Math. **131** (1970), 167-266.
- [Sr] B. SRINIVASAN, *The characters of the finite symplectic group $\mathbf{Sp}(4, q)$* , Trans. A.M.S. **131** (1968), 488-525.
- [St1] R. STEINBERG, *A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field*, Trans. A.M.S. **71** (1951), 274-282.
- [St2] R. STEINBERG, *The representations of $GL(3, q)$, $GL(4, q)$, $PGL(3, q)$ et $PGL(4, q)$* , Canad. J. of Math. **3** (1951), 225-235.
- [St3] R. STEINBERG, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the A.M.S. **80** (1968), 1-108.
- [St4] R. STEINBERG, *Regular elements in semisimple algebraic groups*, Publ. Math. I.H.E.S. **25** (1965), 49-80.
- [Wa] J.L. WALDSPURGER, *Une conjecture de Lusztig pour les groupes classiques*, Mémoires de la S.M.F. **96** (2004), 166 pages.